Examen du 14 janvier 2014

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la concision de la rédaction.
L'utilisation de calculatrices et de téléphones portables est interdite.

Exercice 1. — Soient k un corps et $n \geqslant 1$ un entier.

1) a) Pour quels scalaires $a, b, c \in k$ la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(k)$ est-elle diagonalisable ?

b) Trouver deux matrices de $\mathrm{M}_2(k)$ non semblables sur k et ayant même polynôme caractéristique.

c) Soient M et M' deux éléments de $\mathrm{M}_n(k)$ diagonalisables sur k et tels que $\chi_M = \chi_{M'}$. Montrer que M et M' sont semblables sur k.

2) Soit P un polynôme unitaire de degré n de $k[X]$ et $C(P)$ la matrice compagnon associée. On rappelle que si $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_0$, on a par définition

$$C(P) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(k)$$

a) Montrer que l'on a $\chi_{C(P)} = (-1)^n P$.

b) Si $\lambda \in k$, montrer que le rang de $C(P) - \lambda\,\mathrm{id}$ supérieur ou égal à $n-1$.

c) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) Le polynôme P est scindé sur k à racines simples.
(ii) Toute matrice $M \in \mathrm{M}_n(k)$ telle que $\chi_M = P$ est diagonalisable sur k.
(iii) La matrice $C(P)$ est diagonalisable sur k.

3) Soient r et s deux entiers positifs, $A \in \mathrm{M}_r(k)$, $A' \in M_s(k)$ et $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{r+s}(k)$. Montrer que M est diagonalisable sur k ssi A et A' le sont.

* *
*

Exercice 2. — Soient $\Phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une forme quadratique *non dégénérée*, $\varphi : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ sa forme bilinéaire associée et $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$.

1) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) pour tous $x, y \in \mathbf{R}^n$, $\varphi(u(x), u(y)) = \varphi(x, y)$.
(ii) pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $\Phi(u(x)) = \Phi(x)$.
On note $\mathbf{O}(\Phi)$ l'ensemble des endomorphismes qui vérifient ces conditions.

2) On note Q (resp. M) la matrice de Φ (resp. de u) dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Montrer que l'on a $u \in \mathbf{O}(\Phi)$ ssi ${}^tMQM = Q$.
On note $\mathbf{O}(Q)$ l'ensemble des matrices M qui vérifient cette condition.

3) a) Montrer que $\mathbf{O}(Q)$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$.

b) Montrer que pour deux formes quadratiques *non dégénérées* Φ_1 et $\Phi_2 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ ayant même signature, les groupes $\mathbf{O}(Q_1)$ et $\mathbf{O}(Q_2)$ sont conjugués dans $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$.

4) Dans cette question, on fixe $n = 2$ et $\Phi(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$. Expliciter le groupe $\mathbf{O}(\Phi)$. On montrera notamment que $\mathbf{O}(Q)$ a quatre composantes connexes dont l'une est $\left\{ \begin{bmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{bmatrix},\ \theta \in \mathbf{R} \right\}$.

5) Soit $0 < p < n$ un entier et $\Phi(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2$. Montrer que l'on a un isomorphisme $\mathbf{O}(Q) \cap \mathbf{O}(n) \cong \mathbf{O}(p) \times \mathbf{O}(n-p)$.