Examen du 12 janvier 2015

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la concision de la rédaction.
L'utilisation de calculatrices et de téléphones portables est interdite.

Exercice 1. — **Quelques calculs de commutants (d'après Maths G, 2013).**
k désigne un corps quelconque et n un entier $\geqslant 2$.

1) Soient A et B deux matrices dans $\mathrm{M}_n(k)$ qui commutent.
Montrer que les sous espaces propres de A sont stables par B.

2) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des éléments deux à deux distincts du corps k et $(p_1, \ldots, p_r)$ une liste d'entiers naturels non nuls telle que $p_1 + \cdots + p_r = n$.
Montrer que l'algèbre des matrices de $\mathrm{M}_n(k)$ qui commutent à la matrice diagonale

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 I_{p_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_r I_{p_r} \end{bmatrix}$$

est l'ensemble des matrices diagonales par blocs de la forme :

$$\begin{bmatrix} M_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & M_r \end{bmatrix}$$

où $M_1, \ldots, M_r$ représentent des matrices carrées de formats respectifs $p_1 \times p_1, \ldots, p_r \times p_r$.

3) Cas d'une matrice compagnon.
Soient $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in k^n$ et C la matrice compagnon :

$$C := \begin{bmatrix} 0 & & (0) & & a_0 \\ 1 & \ddots & & & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ (0) & & 0 & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(k).$$

On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de k^n.

a) Soit $M \in \mathrm{M}_n(k)$. Montrer qu'il existe une liste $(b_0, \ldots, b_{n-1}) \in k^n$, telle que

$$Me_1 = \sum_{i=0}^{n-1} b_i C^i e_1.$$

b) En déduire que l'algèbre des matrices qui commutent à C est $k[C]$ (l'algèbre des polynômes en C).

4) Soit $A \in M_2(k)$ non scalaire.
En utilisant la question précédente, montrer que l'algèbre des matrices de $M_2(k)$ qui commutent à A est $k[A]$. Préciser sa dimension.

* *
*

Exercice 2. — Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $\varphi : E \times E \to \mathbf{R}$ une forme bilinéaire symétrique. On fixe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et l'on note $\Phi := [\varphi(e_i, e_j)] \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice de φ dans cette base.
Enfin, pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$, on note $\Phi_k \in \mathrm{M}_k(\mathbf{R})$ la matrice $k \times k$ formée des k premières lignes et k premières colonnes de Φ.

1) Que signifie qu'une forme bilinéaire symétrique est *non-dégénérée* ?

2) Dans cette question, on suppose φ définie positive [1].

a) Montrer que φ est non-dégénérée.

b) Montrer que l'on a $\det \Phi > 0$.

c) Montrer que pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $\det \Phi_k > 0$.

3) Réciproquement, on suppose que l'on a pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, $\det \Phi_k > 0$.

a) Montrer que φ est de signature $(n, 0)$.
[**Indication:** On pourra procéder par récurrence sur n.]

b) En déduire que φ est définie positive.

4) Dans cette question, on suppose que l'on a pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, $\det \Phi_k \neq 0$. On note $S_k \in \{+, -\}$ le signe de $\det \Phi_k$ et on pose $S_0 = +$. Soit q le nombre de changements de signe dans la suite $S_0, S_1, \ldots, S_n$.
Montrer que le φ est de signature $(n - q, q)$.

1. C'est-à-dire que pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geqslant 0$ et que l'on a $(\varphi(x, x) = 0) \Rightarrow (x = 0)$.