Examen du 1^er^ mars 2016

2 heures

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la concision de la rédaction.
L'utilisation de calculatrice, de téléphone portable et autre gadget est interdite.

* *
*

Exercice I. — Les questions suivantes sont indépendantes les unes des autres.

1) Soit G un groupe *fini* et $\rho : G \to \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ un morphisme de groupes. Montrer que pour tout $g \in G$, $\rho(g) \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ est diagonalisable.

2) Soit $N := \begin{bmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbf{C})$. Donner la forme de sa réduite de Jordan.

3) L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ est-il ouvert ?

4) Donner un exemple de matrices $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ *non semblables* ayant même polynôme minimal et même polynôme caractéristique.

5) Pour $n \geqslant 2$, déterminer la signature de la matrice symétrique réelle $S := \begin{bmatrix} & 0 & 1\\ & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$.

6) Soient $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ deux matrices symétriques réelles. On suppose S_1 définie positive.

a) Montrer que S_1 est inversible, que son inverse S_1^{-1} est encore symétrique et définie positive.

b) Montrer que l'endomorphisme S_1S_2 est autoadjoint pour le produit scalaire associé à S_1^{-1}.

c) En déduire que S_1S_2 est diagonalisable.

* *
*

Exercice II. — Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, soit $\Delta(A)$ la matrice par blocs

$$\Delta(A) := \begin{bmatrix} 0 & A \\ \mathrm{Id}_n & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbf{C}).$$

Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$.

1) Montrer que les matrices $\Delta(A)$ et $\Delta(B)$ sont *équivalentes* ssi A et B le sont.

2) Montrer que les matrices $\Delta(A)$ et $\Delta(B)$ sont *semblables* ssi A et B le sont.
[**Indication:** Pour montrer $\Delta(A) \sim \Delta(B) \implies A \sim B$, on pourra calculer $\Delta(A)^2$ et utiliser le théorème de Jordan.]

* *
*

Exercice III. —

0) Question préliminaire : Soit E un espace vectoriel de dimension n et F, G, H des sous-espaces tels que $\dim F + \dim G + \dim H \geqslant 2n + 1$. Montrer que $F \cap G \cap H \neq \{0\}$.
[**Indication:** Utiliser la formule de Grassmann (sans la redémontrer).]

Dans la suite, $\mathbf{R}^n$ est muni de son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ usuel ; on note $\| \cdot \|$ la norme associée. Soient A et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ deux matrices symétriques réelles ; on pose $C := A + B$. Les matrices A, B et C ont toutes leurs valeurs propres réelles. On note :

$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n$ les valeurs propres de A et $f_1, \ldots, f_n$ une b.o.n. de vecteurs propres associés
$\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \cdots \geqslant \beta_n$ les valeurs propres de B et $g_1, \ldots, g_n$ une b.o.n. de vecteurs propres associés
$\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \cdots \geqslant \gamma_n$ les valeurs propres de C et $h_1, \ldots, h_n$ une b.o.n. de vecteurs propres associés.

Le but est de montrer l'inégalité de Weyl : pour tous i, j tels que $i + j - 1 \leqslant n$, on a

$$\gamma_{i+j-1} \leqslant \alpha_i + \beta_j.$$

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $\|x\| = 1$ on a $\alpha_n \leqslant \langle x, Ax \rangle \leqslant \alpha_1$.

On fixe dans la suite des indices i et j tels que $i + j - 1 \leqslant n$ et on pose :

$F := \mathrm{Vect}\{f_i, f_{i+1}, \ldots, f_n\}$, $\quad G := \mathrm{Vect}\{g_j, g_{j+1}, \ldots, g_n\}$ et $\quad H := \mathrm{Vect}\{h_1, \ldots, h_{i+j-1}\}$.

2) Justifier l'existence d'un vecteur $x \in F \cap G \cap H$ tel que $\|x\| = 1$.

3) Montrer que pour x comme ci-dessus, on a

$$\langle x, Ax \rangle \leqslant \alpha_i, \qquad \langle x, Bx \rangle \leqslant \beta_j, \qquad \text{et} \quad \langle x, Cx \rangle \geqslant \gamma_{i+j-1}.$$

4) Conclure.