# Examen du 25 janvier 2017

*2 heures*

*La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la concision de la rédaction.*
*L'utilisation de calculatrice, de téléphone portable et autre gadget est interdite.*

* *
*

***Exercice I.*** — Les questions suivantes sont indépendantes les unes des autres.

**1)** Donner un exemple de matrices $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ ayant même polynôme minimal mais pas mêmes polynômes caractéristiques.

**2)** Pour la topologie usuelle sur $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$, montrer que pour tout entier $0 \leqslant r \leqslant n$, l'ensemble $\{M \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R}),\ \mathrm{rg}(M) \leqslant r\}$ est un fermé.

**3)** Donner un exemple de matrice symétrique dans $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ non diagonalisable.

**4)** Soient $E$ un $k$-ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme *diagonalisable* et $F$ un sous-espace stable pour $u$. Montrer que le morphisme induit $u_{|F} \in \mathcal{L}(F)$ est diagonalisable.

**5)** Soit $E, (<>)$ un espace hermitien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme antisymétrique, c'est-à-dire tel que $u^* = -u$ (où $u^*$ désigne l'adjoint de $u$).
Montrer que toutes les valeurs propres de $u$ sont imaginaires pures.

**6)** Soit $E$ un ev et $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r \in E^*$ des formes linéaires.
Montrer que $\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ ssi $\bigcap_{i=1}^r \ker \varphi_i \subset \ker \varphi$

* *
*

***Exercice II.*** — Soit $E$ un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.

**1)** Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes qui commutent. Montrer que $u$ stabilise les espaces caractéristiques de $v$.

**2)** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\chi_u$ admet $n$ racines disctinctes.

(ii) le seul endomorphisme nilpotent qui commute à $u$ est l'endomorphisme nul.

* *
*

***Exercice III.*** — Pour $n \geqslant 1$, soit $S_n \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice symétrique :

$$S_n := \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Par définition, on a $S_1 := [0]$, $S_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $S_3 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

On note $Q_n : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, X \mapsto {}^tXS_nX$ la forme quadratique associée à $S_n$.

**1)** Pour $n = 2$ et $n = 3$, appliquer l'algorithme de Gauss à $Q_n(X)$ pour déterminer son rang et sa signature.

**2)** On note $\chi_n$ le polynôme caractéristique de $S_n$. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$\chi_{n+2} = -X\chi_{n+1} - \chi_n.$$

En déduire que $Q_n$ est non-dégénérée ssi $n$ est pair.

**3)** Pour $n$ impair, montrer que le rang de $Q_n$ est $n - 1$.
[**Indication:** On pourra considérer une restriction de $Q_n$ à un sous-espace bien choisi.]

**4)** Montrer que pour tout $n$, les matrices $S_n$ et $-S_n$ sont congruentes.
[**Indication:** Que vaut $Q(-x_1, x_2, -x_3, \ldots, (-1)^n x_n)$ ?].

**5)** En déduire la signature de $S_n$ en fonction de $n$.