Sous-groupes de $\mathbf{GL}_n(k)$

Exercice 1. — Donner le plus d'exemples possibles de sous-groupes de $\mathbf{GL}_n(k)$.

Exercice 2. — Déterminer le centre et le groupe dérivé de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ et ceux de $\mathbf{SL}_n(\mathbf{C})$.

Exercice 3. — Montrer que $(k^n, +)$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbf{GL}_{n+1}(k)$.

Exercice 4. — **a)** Montrer que $\mathbf{SL}_n(k)$ est engendré par les matrices de transvections. En déduire que tout élément de $\mathbf{GL}_n(k)$ est le produit d'une seule dilatation et de transvections.

b) Montrer que $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ est engendré par les matrices $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

c) Quels sont les éléments d'ordre 2 de $\mathbf{SL}_2(k)$?

Exercice 5. — Déterminer le sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ engendré par les matrices inversibles diagonalisables.

Exercice 6. — **a)** Montrer que $\mathbf{C}^\times$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{R})$.

b) Soient K et L deux corps tels que L soit un K-espace vectoriel de dimension finie n. Montrer que $L^\times$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(K)$.

Exercice 7. — Soit G un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$. Montrer que tous les éléments de G sont diagonalisables. Que dire des sous-groupes abéliens finis de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$?
Donner un exemple de sous-groupe abélien de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{C})$ qui ne soit pas diagonalisable.

Exercice 8. — Soit $\Delta \subset \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ le sous-groupe formé des matrices diagonales.

a) Montrer que Δ n'est pas distingué dans $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$.

b) Soit $N := \{P \in \mathbf{GL}_n,\ \forall D \in \Delta,\ PDP^{-1} \in \Delta\}$ le normalisateur de D dans $\mathbf{GL}_n$. Montrer que D est un sous-groupe distingué de N et montrer que $N/D \cong \mathfrak{S}_n$.

Exercice 9. — **Lemme de Maschke**
Soient k de caractéristique nulle, G un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}_n(k)$ et F_1 un sous-espace stable par tous les éléments de G. Montrer qu'il existe un supplémentaire F_2 de F_1 qui est stable par tous les éléments de G.
[**Indication :** Soit K un supplémentaire quelconque de F_1 et p le projecteur sur F_1 parallèlement à K. Considérer $\pi := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gpg^{-1}$.].

Exercice 10. — Soit G un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z})$. Montrer que l'ordre d'un élément $g \in G$ est $1, 2, 3, 4$ ou 6.

Exercice 11. — Soit p un nombre premier et G un p-groupe (fini). Soit $\varphi : G \to \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ un morphisme de groupes. En utilisant les théorèmes de Sylow, montrer qu'il existe $M \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ tel que $\forall g \in G$, $M\varphi(g)M^{-1}$ soit triangulaire supérieure de diagonale 1.

Exercice 12. — On munit $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ de la norme triple associée à une norme de $\mathbf{C}^n$. Soit G un sous-groupe borné de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$.

a) Soit $g \in G$. Montrer que les valeurs propres de g sont de module 1 et que g est diagonalisable.

b) On suppose $G \subset \mathrm{B}(\mathrm{id}, \sqrt{2})$. Montrer que G est trivial.
[**Indication :** Montrer que 1 est la seule valeur propre de tout élément $g \in G$, puis que $g = \mathrm{id} + n$ avec n nilpotent, puis que $n = 0$.]