Polynômes orthogonaux et quadrature de Gauss

Dans tout le problème, on fixe un intervalle *fini* $I = [a, b]$ de $\mathbf{R}$ et $\omega : I \to \mathbf{R}^+$ une fonction *strictement positive*. Pour toute fonction continue $f : I \to \mathbf{R}$, on pose

$$\mathcal{I}(f) := \int_a^b f(t)\omega(t)\mathrm{dt}.$$

I. Quadrature

Pour tout entier positif $n \geqslant 0$, on note $\mathbf{R}[X]_{<n}$ l'espace des polynômes de degré $< n$. Dans cette partie, on fixe n points $x_1, \ldots, x_n$ deux à deux distincts de I.

1. — A chaque $x \in I$, on associe la forme linéaire $\varepsilon_x : \mathbf{R}[X]_{\leqslant n} \to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall\, P \in \mathbf{R}[X]_{<n},\ \varepsilon_x(P) := P(x).$$

Montrer que $\{\varepsilon_{x_1}, \ldots, \varepsilon_{x_n}\}$ est une base de l'espace dual $\mathbf{R}[X]^*_{<n}$.

2. — En déduire qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (dépendant seulement des points x_i) tels que :

$$(\star) \qquad \forall\, P \in \mathbf{R}[X]_{<n},\ \mathcal{I}(P) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i).$$

Par la formule $(\star)$ précédente, on peut s'attendre à ce que pour n grand la somme $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$ soit une bonne approximation numérique de l'intégrale $\mathcal{I}(f)$, d'où le terme de quadrature.
Le but de ce problème est de justifier cette approximation et d'optimiser le choix des points x_i.

II. Polynômes orthogonaux

On note E l'espace $\mathcal{C}(I; \mathbf{R})$ des fonctions continues de I dans $\mathbf{R}$.

3. — Montrer que la formule

$$\langle f, g\rangle_\omega := \int_a^b f(t)g(t)\omega(t)\mathrm{dt}$$

définit un produit scalaire sur E. On note $\|\cdot\|_\omega$ la norme associée.

4. — Montrer qu'il existe une *unique* famille de polynômes $(P_i)_{i\in\mathbf{N}}$ telle que :

i) pour tout entier positif i, P_i est unitaire de degré i

ii) pour tous entiers positifs $i \neq j$, $\langle P_i, P_j\rangle_\omega = 0$.

Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, la famille $\{P_0, \ldots, P_{n-1}\}$ forme une base de $\mathbf{R}[X]_{<n}$.

5. — Le but de cette question est de montrer que pour tout entier n le polynôme P_n précédent a n racines distinctes dans l'intervalle I. Pour cela, on raisonne par l'absurde. On suppose que n'est pas le cas et l'on note $y_1, \ldots, y_k$ les racines de P_n situées dans I qui sont de *multiplicité impaire.* Soit enfin L le polynôme $\prod_{i=1}^k (X - y_i)$.

a) Justifier que $k < n$.

b) Montrer que la fonction $I \to \mathbf{R},\ t \mapsto P_n(t)L(t)$ ne change pas de signe.

c) En considérant $\langle P_n, L\rangle_\omega$, aboutir à une contradiction.

6. — Pour tout $n \geqslant 1$, montrer qu'il existe des réels α_n et β_n tels que l'on ait :

$$XP_n = P_{n+1} + \alpha_n P_n + \beta_n P_{n-1}.$$

Montrer que $\alpha_n = \frac{\langle XP_n, P_n\rangle_\omega}{\|P_n\|^2_\omega}$ et $\beta_n = \frac{\|P_n\|^2_\omega}{\|P_{n-1}\|^2_\omega}$.
[**Indication:** On pourra remarquer (en la justifiant) l'égalité $\langle XP_n, Q\rangle_\omega = \langle P_n, XQ\rangle_\omega$.]

7. — Soit M_n la matrice tridiagonale $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \sqrt{\beta_1} & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_2 & \sqrt{\beta_2} & & \vdots \\ 0 & \sqrt{\beta_2} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_n \end{bmatrix}$. Montrer que l'on a dét $(X\,\mathrm{id} - M_n) = P_n$. En déduire grâce au principe du minimax (*c.f.* exercice *22* de la feuille bilinéaire) qu'entre deux racines succesives de P_n il y a une racine de P_{n-1}.

III. Quadrature de Gauss

8. — Soit $n \geqslant 0$ fixé. On note $y_1, \dots, y_n$ les racines de P_n ; pour tout $g : I \to \mathbf{R}$, on pose :

$$\mathcal{S}_n(g) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(y_i).$$

a) Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que pour tout polynôme Q *de degré* $< 2n$, on ait :

$$\mathcal{I}(Q) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q(y_i).$$

[**Indication:** Commencer par montrer l'identité ci-dessus pour Q de degré $< n$. Dans le cas général, considérer la division euclidienne de Q par P_n.]

b) En utilisant **a)**, montrer, pour tout $j \in [1, n]$, les identités :

$$\lambda_j = \mathcal{I}\Big(\prod_{i \neq j} \frac{X - y_i}{y_j - y_i}\Big) = \mathcal{I}\Big(\prod_{i \neq j} \frac{(X - y_i)^2}{(y_j - y_i)^2}\Big)$$

et en déduire que $\lambda_j > 0$.

c) En utilisant **a)**, montrer que la somme $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j$ est constante égale à $\int_a^b \omega(t)\mathrm{d}t$.

9. — On garde les notations de ***8.*** On veut montrer que pour f fixée, $\mathcal{S}_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{I}(f)$. Pour cela, on fixe $\varepsilon > 0$. Puisque I est fini, d'après le théorème de Weierstrass, il existe un polynôme P tel que $\sup_{x \in I} |f(x) - P(x)| < \varepsilon$.

a) Montrer que pour $n > \deg(P)$, on a :

$$|\mathcal{I}(f) - \mathcal{S}_n(f)| \leqslant |\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}(P)| + |\mathcal{S}_n(P) - \mathcal{S}_n(f)|.$$

b) Montrer que l'on a $|\mathcal{S}_n(P) - \mathcal{S}_n(f)| \leqslant \varepsilon \cdot \int_a^b \omega(t)\mathrm{d}t$.
[**Indication:** Utiliser ***8.b) et 8.c)***.]

c) Conclure.

FIN DU SUJET

Note culturelle : En pratique, les cas particuliers suivants sont utilisés [1] :

I	ω	Nom
$[-1, 1]$	1	Polynômes de Legendre
$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Polynômes de Tchebychev de première espèce
$[-1, 1]$	$\sqrt{1-x^2}$	Polynômes de Tchebychev de seconde espèce
$[0, +\infty]$	e^{-x}	Polynômes de Laguerre
$[-\infty, +\infty]$	e^{-x^2}	Polynômes de Hermite

1. Attention, lorsque l'intervalle I n'est pas fini, les résultats de ***1.*** à ***8.*** restent vrais mais nécessitent de justifier la convergence des intégrales. Par contre, ***9.*** n'est plus vrai tel quel.