Applications linéaires – matrices – rang

I. Applications linéaires

***Exercice 1*. — Vrai ou faux ?**
Soit E de dimension finie n, $e_1, \dots, e_k \in E$ des vecteurs et $u \in \mathcal{L}(E)$.

a) Si $\{e_1, \dots, e_k\}$ est libre alors $\{u(e_1), \dots, u(e_k)\}$ l'est aussi.

b) Si $\{u(e_1), \dots, u(e_k)\}$ est libre alors $\{e_1, \dots, e_k\}$ l'est aussi.

c) Si $\{e_1, \dots, e_k\}$ est génératrice alors $\{u(e_1), \dots, u(e_k)\}$ l'est aussi.

d) Si $\{u(e_1), \dots, u(e_k)\}$ est génératrice alors $\{e_1, \dots, e_k\}$ l'est aussi.

e) Si $(u(e_1), \dots, u(e_k))$ est une base de $\operatorname{Im} u$ alors $(e_1, \dots, e_k)$ est une base d'un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$

***Exercice 2*.** — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que pour tout $x \in E$, la famille $\{x, u(x)\}$ soit liée.
Montrer que u est une homothétie.
Que dire de u si pour tout plan vectoriel P, on a $u(P) \subset P$?

***Exercice 3*.** — Soient E de dimension finie, E_1, E_2 deux sev. A quelle condition nécessaire et suffisante existe-t-il un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ de noyau E_1 et d'image E_2 ?

***Exercice 4*.** — [**Gourdon III.2.1**] Soient E de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer :

a) $\operatorname{rg}(u \circ v) \leqslant \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$.

b) $\dim \ker(u \circ v) = \dim \ker v + \dim(\ker u \cap \operatorname{Im} v)$

c) $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \leqslant n + \operatorname{rg}(u \circ v)$.

d) $\forall k \geqslant 0,\ \operatorname{rg} u^k - \operatorname{rg} u^{k+1} \geqslant \operatorname{rg} u^{k+1} - \operatorname{rg} u^{k+2}$.

e) $\operatorname{rg}(u + v) \leqslant \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$.

f) $|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leqslant \operatorname{rg}(u + v)$.

***Exercice 5*. — Lemmes de factorisation**
Soient E, F, G des ev de dimension finie.

a) Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $w \in \mathcal{L}(E, G)$. Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}(F, G)$ telle que $w = vu$ ssi $\ker u \subset \ker w$.

b) Soient $v \in \mathcal{L}(F, G)$ et $w \in \mathcal{L}(E, G)$. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $w = vu$ ssi $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} v$.

***Exercice 6*.** — Soit φ le morphisme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}[X] & \to & \mathbf{C}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X). \end{array}$$

a) Pour $d > 0$, quelle est l'image de $\mathbf{C}[X]_{<d}$ par φ ?

b) Pour n entier, on pose : $\begin{cases} C_0 = 1 \\ C_n = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!} & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$.
Montrer que $(C_n)_{n \in \mathbf{N}}$ forme une base de $\mathbf{C}[X]$ et calculer $\varphi(C_n)$.

c) Application 1 : Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme tel que $P(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}$. Montrer que P est combinaison linéaire *à coefficients entiers* des C_n.

d) Application 2 : Soit $p > 0$ un entier. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\Sigma_p \in \mathbf{C}[X]$ tel que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^p = \Sigma_p(n).$$

Exercice 7. — Soient E un ev de dimension finie n et $E_1, \dots E_k$ des sev tels que l'on ait

$$\sum_{i=1}^{k} \dim E_i > (k-1)n.$$

Montrer que $\cap_{i=1}^{k} E_i \neq \{0\}$.

[**Indication:** Considérer l'application $\begin{array}{ccc} E_1 \times \cdots \times E_k & \to & E^{k-1} \\ (x_1, \dots, x_k) & \mapsto & (x_1 - x_2, \dots, x_{k-1} - x_k) \end{array}$.]

Exercice 8. — **[Gourdon, ex III.3.7]**
Montrer que le rang d'un projecteur coïncide avec sa trace.
En déduire que si $p_1, \dots, p_k$ sont des projecteurs alors $p_1 + \cdots + p_k$ est un projecteur ssi on a $p_i \circ p_j = 0,\ \forall\, i \neq j$.

II. Matrices

Exercice 9. — Ecrire la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme Φ de $\mathbf{C}[X]_{\leqslant 3}$ tel que $\Phi(P) = P(X+1)$.

Exercice 10. — Déterminer suivant les valeurs du paramètre $a \in k$ le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 2 \\ 2a & 1 & a \\ 0 & a & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ a & a^2 & a + 2a^2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Exercice 11. — Soit $M \in \mathrm{M}_n(k)$.

a) Montrer que $\operatorname{rg} M = 1$ ss'il existe des vecteurs colonnes non nuls X et Y tels que $M = X \cdot {}^t Y$.

b) Montrer que $\operatorname{rg} M = 2$ ss'il existe deux couples de vecteurs colonnes (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2), tous deux libres, tels que $M = X_1 \cdot {}^t Y_1 + X_2 \cdot {}^t Y_2$.

c) Généraliser.

Exercice 12. — Soit $A \in \mathrm{M}_n(k)$ fixée. Calculer le rang des endomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(k) & \to & \mathrm{M}_n(k) \\ M & \mapsto & A \cdot M \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(k) & \to & \mathrm{M}_n(k) \\ M & \mapsto & M \cdot A \end{array}.$$

Deux méthodes proposées :

a) En écrivant les matrices de ces endomorphismes (dans une bonne base de $\mathrm{M}_n(k)$).

b) En calculant la dimension du noyau de ces endomorphismes et en remarquant que cette dimension est invariante si l'on change A par une matrice équivalente.

Exercice 13. — Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice à coefficients *réels*.

a) Montrer que l'on a $\operatorname{rg}({}^t M \cdot M) = \operatorname{rg}(M)$. Retrouver ainsi l'égalité $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}({}^t M)$.

b) Quel est l'énoncé analogue sur $\mathbf{C}$?

Exercice 14. — Soit $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(k)$ une matrice par blocs avec $A \in \mathrm{M}_r(k)$ et $D \in M_{n-r}(k)$ carrées. On suppose A inversible.
Montrer que l'on a $\operatorname{rg} M \geqslant r$ avec égalité ssi $D = CA^{-1}B$.

Exercice 15. — Comparer les rangs sur $\mathbf{C}, \mathbf{Q}$ et $\mathbf{F}_p$ d'une matrice à coefficients entiers.
Que dire de l'ensemble des nombres premiers p pour lesquels les rangs sont différents ?

Exercice 16. — **Matrices échelonnées réduites**
On dit qu'une matrice *échelonnée* (en colonnes) est *réduite* si tous ses pivots valent 1 et si tous les coefficients à gauche d'un pivot sont nuls. On dit que deux matrices $M, N \in \mathrm{M}_{n,m}(k)$ sont équivalentes à droite s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_m(k)$ telle que $N = M \cdot P$.

a) Montrer que toute matrice est équivalente à droite à une matrice échelonnée réduite.

b) Montrer que deux matrices sont équivalentes à droite ssi elles ont même image.
[**Indication:** On peut s'inspirer des lemmes de factorisation (Ex 5).]

c) Montrer que deux matrices échelonnées réduites qui sont équivalentes à droite sont égales.
[**Indication:** Les colonnes non nulles d'une matrice échelonnée réduite forment une base de l'image. Lorsque'lle est réduite, la décomposition d'un vecteur de l'image comme CL des colonnes est facile. Commencer par montrer que deux telles matrices ont mêmes indices de pivots.]

d) Si M et $M \cdot P$ sont échelonnées réduites, a-t-on nécessairement $P = \mathrm{id}$?

e) **Application numérique :** Pour $k = \mathbf{F}_q$, combien y a-t-il de classes d'équivalence à droite dans $\mathrm{M}_{3,2}(\mathbf{F}_q)$?

f) Que devient ce qui précède pour la relation d'équivalence à gauche ?

Exercice 17. — Soit $n \geqslant 1$ un entier.

a) Montrer que $\mathrm{GL}_n(k)$ est engendré par les matrices de transvection et les dilatations.

b) Montrer que $\mathrm{SL}_n(k)$ est engendré par les matrices de transvection.

c) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est engendré par les matrices de transvection et les homothéties.
Est-ce vrai pour $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$? (Distinguer selon la parité de n.)
Est-ce vrai pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3)$?

Exercice 18. — **Un critère d'inversibilité**
Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ (resp. $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$) une matrice telle que $\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n,\ |m_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |m_{i,j}|$.
Montrer que M est inversible.

Exercice 19. — **a)** Déterminer en fonction des paramètres a et b le rang de la matrice

$$N = \begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(k)$$

[**Indication:** Si J est la matrice avec des 1 partout, $N = bJ + (a-b)\mathrm{id}$. Diagonaliser J.]

b) **Application :** On a $2n+1$ cailloux $c_1, \dots, c_{2n+1}$ de masses respectives $m_1, \dots m_{2n+1}$. On suppose que pour tout $i \in \{1, \dots, 2n+1\}$, les $2n$ cailloux obtenus en enlevant c_i peuvent se partager en deux tas de n cailloux de même masse totale.
Montrer que $m_1 = m_2 = \cdots = m_{2n+1}$.
[**Indication:** Soit M le vecteur colonne des poids ; M est dans le noyau d'une matrice C à coefficients entiers. Réduire C modulo 2 et utiliser a).]

Exercice 20. — Soient $k = \mathbf{F}_q$ un corps fini et E un k–ev de dimension finie n. Combien y a-t-il d'endomorphismes $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang r ?

Exercice 21. — Montrer que les seuls idéaux bilatères de $\mathrm{M}_n(k)$ sont $\{0\}$ et $\mathrm{M}_n(k)$.
[**Indication:** Si I est un idéal non nul, montrer que I contient une matrice de rang 1, puis toutes les matrices de rang 1.]

Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de rang majoré

Le but de ce problème est de démontrer le résultat suivant :

Théorème. — *Soit $p \in [0, n]$ un entier. Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant :*

$$(\star) \qquad \forall M \in \mathcal{V},\ \operatorname{rg}(M) \leqslant p.$$

Alors on a $\dim \mathcal{V} \leqslant np$.

1. — Montrer le théorème si $p = 0$ ou si $p = n$.

Dans toute la suite, on suppose $p \neq 0$ et $p \neq n$.

2. — Soit $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbf{R})$ une matrice telle que ${}^tBB = 0$. Montrer que $B = 0$.

On note Id_p la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$. Soit alors $J_p \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice par blocs

$$J_p := \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice de la forme $\begin{bmatrix} 0 & B \\ \mathrm{A} & \mathrm{C} \end{bmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbf{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbf{R})$ et $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbf{R})$. Les coefficients de A (resp. de B, resp. de C) sont notés $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant n-p}}$ (resp. $(b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n-p \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, resp. $(c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n-p \\ 1\leqslant j\leqslant n-p}}$).

On suppose que pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a $\operatorname{rg}(M + \lambda J) \leqslant p$.

a) Montrer que, pour tout réel $\lambda \neq 0$ et pour tous indices $i, j \in [1, n-p]$

$$\operatorname{rg} \begin{bmatrix} \lambda & & & & b_{1,j} \\ & \lambda & & & b_{2,j} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \lambda & b_{p,j} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,p} & c_{i,j} \end{bmatrix} = p,$$

puis que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j} = \lambda c_{i,j}$.

b) En déduire que $C = 0$ et que $AB = 0$.

4. — Soit $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{bmatrix} 0 & B \\ {}^tB & C \end{bmatrix}$ où $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbf{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbf{R})$ sont des blocs quelconques. Justifier que $\mathcal{X}$ est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

5. — Le but de cette question est de démontrer le théorème pour un espace $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ satisfaisant à $(\star)$ et contenant J.

a) En utilisant les questions **2.** et **3.**, montrer que $\mathcal{V}_0$ et $\mathcal{X}$ sont en somme directe.

b) En déduire que $\dim \mathcal{V}_0 \leqslant np$.

6. — Démontrer le théorème pour un espace $\mathcal{V}$ général (c'est-à-dire lorsque l'on ne suppose plus $J \in \mathcal{V}$).

[**Indication:** Si $\mathcal{V}$ vérifie $(\star)$, on pourra considérer l'ensemble $\mathcal{V}_0 := \{PMQ, M \in \mathcal{V}\}$ pour des matrices P et Q bien choisies.]

7. — Montrer que l'inégalité du théorème est optimale, c'est-à-dire qu'il existe au moins un sous-espace $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $(\star)$ et de dimension exactement np.

8. — **Question subsdiaire :** Le théorème reste-t-il valable si l'on remplace le corps $\mathbf{R}$ par le corps $\mathbf{C}$?