Réduction des endomorphismes

I. Polynômes d'endomorphismes

Exercice 1. — Quels sont les endomorphismes dont le polynôme minimal est de degré 1 ?

Exercice 2. — Déterminer le polynôme minimal de la matrice compagnon

$$C := \begin{bmatrix} 0 & 0 & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Montrer que le commutant de C (c'est-à-dire l'ensemble des matrices qui commute à C) est $k[C] := \{P(C),\ P \in k[X]\}$.

Exercice 3. — Soient $k \subset k'$ deux corps et $M \in \mathrm{M}_n(k) \subset \mathrm{M}_n(k')$. Montrer que le polynôme minimal de M est le même sur k et sur k'.

Exercice 4. — Soient A et B dans $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que les polynômes caractéristiques χ_{AB} et χ_{BA} sont égaux. Les polynômes minimaux π_{AB} et π_{BA} sont-ils égaux ?

Exercice 5. — Pour $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, montrer que l'application $A \mapsto \chi_A$ est continue, mais que $M \mapsto \pi_M$ ne l'est pas.
Montrer que l'ensemble des points de continuité de π est $\{M \in \mathrm{M}_n(k), \chi_M = \pi_M\}$.
[**Indication:** Montrer que c'est un ouvert de $\mathrm{M}_n(k)$.]

Exercice 6. — Soient A et $B \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que l'on a $\chi_A = \chi_B$ ssi $\forall\, k,\ \mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(B^k)$.

Exercice 7. — Donner un exemple de matrices non semblables qui ont même polynôme minimal et même polynôme caractéristique.

Exercice 8. — Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Montrer que A^{-1} est un polynôme en A.

Exercice 9. — Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $M^3 - M^2 - 2M = 0$. Montrer que $\mathrm{tr}(M) \in \mathbf{Z}$.

Exercice 10. — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $x \in E$, on pose $E_x = \{P(u)(x),\ P \in k[X]\}$.

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire π_x de $k[X]$ tel que $P(u)(x) = 0$ ssi $\pi_x | P$.

b) Montrer que E_x est le plus petit sous-espace de E stable par u et contenant x. Montrer que $\pi_x | \pi_u$ et que E_x est un espace de dimension $d_x := \deg(\pi_x)$. Expliciter la matrice de $u_{|E_x}$ dans la base $(x, u(x), \cdots, u^{d_x - 1}(x))$. Montrer (sans utiliser Cayley-Hamilton) que π_x divise χ_u et retrouver ainsi le théorème de Cayley-Hamilton.

c) Montrer que si $E_x \cap E_y = \{0\}$ alors $\pi_{x+y} = \mathrm{ppcm}(\pi_x, \pi_y)$. Montrer que si π_x et π_y sont premiers entre eux alors $E_{x+y} = E_x \oplus E_y$.
Donner une interprétation matricielle de ce résultat en termes de matrices compagnons.

d) Soit $P \in k[X]$ tel que $P | \pi_u$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\pi_x = P$.
[**Indication:** Commencer par le cas où P est une puissance d'un polynôme irréductible.]

e) **Application :** Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\pi_u = \chi_u$,

(ii) il existe x tel que $E_x = E$,

(iii) il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est une matrice compagnon.

Exercice 11. — Soit E un k-ev de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent tel que $\dim \ker u = 1$. Montrer que $\pi_u = X^n$.

Exercice 12. — Soit u un endomorphisme de E de dimension n. Montrer que l'on a $\pi_u \mid \chi_u \mid \pi_u^n$. En déduire que π_u et χ_u ont les mêmes facteurs irréductibles (avec des multiplicités différentes).

Exercice 13. — Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et P_σ la matrice de permutation associée.
Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de P_σ.

II. Endomorphismes nilpotents

Exercice 14. — Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent alors $\mathrm{id} + u$ est inversible.
Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\mathrm{id} + u = v^2$.

Exercice 15. — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Montrer que u est nilpotent ss'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} u$ soit triangulaire supérieure stricte.
En déduire que l'indice de nilpotence de u est toujours inférieur ou égal à $\dim E$.
Applications : la matrice $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbf{C})$ est-elle un carré dans $\mathrm{M}_3(\mathbf{C})$?
Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes est un fermé de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$.

Exercice 16. — Soit $M \in \mathrm{M}_n(k)$. Montrer que M est nilpotente ssi $\forall i \geqslant 1$ $\mathrm{tr}(M^i) = 0$.

Exercice 17. — Soient k un corps infini et $A, B \in \mathrm{M}_n(k)$ deux matrices. On suppose qu'il existe $n+1$ scalaires distincts $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que pour tout i, $A + \lambda_i B$ est nilpotente.
Montrer qu'alors A et B sont nilpotentes.
[**Indication:** Considérer le polynôme à deux variables $\text{dét}\,(A + \Lambda B - X\,\mathrm{id}) \in k[\Lambda, X]$.]

Exercice 18. — Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} ?$$

Exercice 19. — **Réduction de Jordan des nilpotents**
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice $d+1$ (c'est-à-dire tel que $u^{d+1} = 0$ et $u^d \neq 0$). Pour tout $k \geqslant 0$, on pose $N_k := \ker u^k$.

- **a)** Montrer que l'on a une suite d'inclusions strictes $0 = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \cdots \subsetneq N_{d+1} = E$ et que la suite $\dim N_i - \dim N_{i-1}$ est décroissante.
- **b)** Soit F_d un supplémentaire de N_d dans $N_{d+1} = E$ et soit $(e_1, \ldots, e_{i_d})$ une base de F_d. Montrer que la famille $\{e_1, u(e_1), \ldots, u^d(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, u^d(e_{i_d})\}$ est libre.
Montrer que $\mathrm{Vect}\{e_1, u(e_1), \ldots, u^d(e_1)\}$ est stable par u. Quelle est, dans cette base, la matrice de la restriction de u à cet espace ?
- **c)** Montrer que l'on peut itérer le procédé et en déduire l'existence d'une base de Jordan.
- **d)** Montrer que deux matrices nilpotentes A et B sont semblables ssi pour tout $k \geqslant 0$, on a $\dim \ker A^k = \dim \ker B^k$.

Exercice 20. — Soit $J_n \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ le bloc de Jordan de taille n.
Donner la réduction de Jordan de J_n^2 et préciser une base donnant cette réduction.

***Exercice 21* (Mneimné, p. 35)**. — Soient A et B deux matrices nilpotentes. Montrer qu'elles sont semblables dans chacun des cas suivants :

- **a)** $\dim \ker A = \dim \ker B = 1$.
- **b)** A et B non nuls et $\dim \ker A^2 = \dim \ker B^2 = 3$.

Exercice 22. — Soit E un ev de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre n.

a) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $\{x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\}$ soit une base de E.

b) Expliciter tous les sous-espaces de E stables par u.
[**Indication:** Il y en a $n+1$.]

c) Quels sous-espaces stables admettent un supplémentaire stable ?

d) Montrer que pour u d'ordre $d < n$ l'ensemble des sous-espaces stables par u est infini.

Exercice 23. — Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que 0 (la matrice nulle) est dans l'adhérence de la classe de conjugaison de M ssi M est nilpotente.

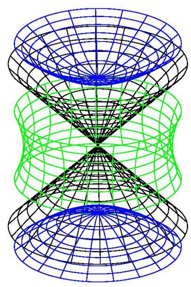
Exercice 24. — Combien y a-t-il de classes de similitudes de matrices nilpotentes dans $\mathrm{M}_n(k)$?

***Exercice 25* (Mneimné, p. 44).** — **Géométrie du cône nilpotent en dimension 2.** Soit $\mathcal{N}_2 \subset \mathrm{M}_2(\mathbf{R})$ le sous-ensemble des matrices nilpotentes de dimension 2.

a) Montrer que $\mathcal{N}_2$ est contenu dans l'espace vectoriel $\mathcal{T}$ des matrices de trace nulle.

b) Montrer que l'application $\mathbf{R}^3 \to \mathcal{T}$, $(x, y, z) \mapsto \begin{bmatrix} x & y+z \\ y-z & -x \end{bmatrix}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Dans la suite, on identifie ainsi $\mathbf{R}^3$ et $\mathcal{T}$.

c) Montrer que $\mathcal{N}_2$ est un cône $\mathcal{C}$ (au sens usuel) de $\mathbf{R}^3$.



d) Montrer que les classes de conjugaison des matrices inversibles diagonalisables (sur $\mathbf{R}$) de $\mathcal{T}$ sont des hyperboloïdes à une nappe extérieurs au cône $\mathcal{C}$.

e) Montrer que les classes de conjugaison des matrices inversibles non diagonalisables (sur $\mathbf{R}$) de $\mathcal{T}$ sont des hyperboloïdes à 2 nappes intérieurs au cône $\mathcal{C}$.

III. Diagonalisabilité – trigonalisabilité

Exercice 26. — Donner des exemples de matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ non diagonalisables.
Donner des exemples de matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ non trigonalisables.

Exercice 27. — Montrer que pour toutes matrices A, B, C dans $\mathrm{M}_2(k)$ on a :

$$(AB - BA)^2 C - C(AB - BA)^2 = 0.$$

[**Indication:** Pour éviter le calcul brutal, remarquer que $AB - BA$ est de trace nulle.]

Exercice 28. — Soient $n > 1$ un entier et $X_1, \dots, X_n$ des indéterminées, k le corps $\mathbf{Q}(X_1, \dots, X_n)$, P le polynôme $(T - X_1)\cdots(T - X_n)$ de $k[T]$ et $C(P) \in \mathrm{M}_n(k)$ sa matrice compagnon.

a) Montrer que $C(P)$ est trigonalisable (et même diagonalisable) sur k.

b) En déduire que les polynômes de Newton $N_p := X_1^p + \cdots + X_n^p$, $p \in \mathbf{N}^*$ sont des combinaisons linéaires (à coefficients entiers) des puissances des polynômes symétriques élémentaires. Plus précisément, montrer que pour tout $i \leqslant n$, on a $N_i = i\sigma_i + P(\sigma_{<i})$.

c) Retrouver ainsi que les polynômes de Newton $N_1, \dots, N_n$ forment une base de l'algèbre des polynômes symétriques $\mathbf{Q}[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$.

Exercice 29. — Soient P, Q deux polynômes de $k[X]$. Soit également A une matrice telle que $\chi_A = P$. Montrer que l'on a $\mathrm{Res}(P, Q) = \pm\,\mathrm{dét}\; Q(A)$.

Exercice 30. — Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Exercice 31. — Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) & \to & \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array}$$

Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

Exercice 32. — Déterminer les valeurs et les espaces propres de l'endomorphisme :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X]_{\leqslant n} & \to & \mathbf{R}[X]_{\leqslant n} \\ P & \mapsto & (X^2-1)P'' - (2X+1)P' \end{array}$$

Est-il diagonalisable ?

Exercice 33. — Montrer que $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ est diagonalisable ssi ${}^tA$ l'est.
Plus généralement, en utlisant la réduction de Jordan, montrer que A est semblable à ${}^tA$.

Exercice 34. — Quels sont les endomorphismes nilpotents diagonalisables ?

Exercice 35. — Soient E un k-ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $F \subset E$ un sev stable par u. Montrer que si u est diagonalisable alors la restriction de $v := u_{|F} \in \mathcal{L}(F)$ est diagonalisable. Comparer les espaces propres de u et v.

Exercice 36. — Soient $k \geqslant 1$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice inversible telle que A^k soit diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable.
Qu'en est-il si A n'est pas inversible ? Si A est réelle ?

Exercice 37. — Soit $\mathbf{F}_q$ un corps fini et $M \in \mathrm{M}_n(\mathbf{F}_q)$. Montrer que M est diagonalisable ssi $M^q = M$.

Exercice 38. — Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{Z})$ et p un nombre premier.
Montrer que l'on a la congruence $\mathrm{tr}(A^p) \equiv \mathrm{tr}(A)[p]$.
[**Indication:** Considérer la réduction $\overline{A} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{F}_p)$ et commencer par traiter le cas où $\overline{A}$ est trigonalisable.]

Exercice 39. — Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des scalaires deux à deux distincts et $n_1, \ldots, n_r \geqslant 0$ des entiers. On pose $n = n_1 + \cdots n_k$. Soit D "la" matrice diagonale de $\mathrm{M}_n(k)$ dont les valeurs propres sont les λ_i répétés avec multiplicité n_i.

a) Montrer que le stabilisateur de D pour l'action de $\mathrm{GL}_n(k)$ par conjugaison est isomorphe à $\prod_{i=1}^r \mathrm{GL}_{n_i}(k)$.

b) En déduire que le nombre de matrices diagonalisables de $\mathrm{M}_n(\mathbf{F}_q)$ est

$$\sum_{n_1+\cdots+n_q=n} \frac{|\,\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)|}{\prod_{i=1}^q |\,\mathrm{GL}_{n_i}(\mathbf{F}_q)|}$$

où la somme porte sur toutes les décompositions de n en somme de q entiers $\geqslant 0$.
(N.B. : le groupe GL_0 est le groupe trivial à un élément).

Exercice 40. — Soit A et B deux éléments de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que A et B sont conjugées dans $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ ssi elles sont conjuguées dans $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$.
[**Indication:** Soit $P \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On note Q et R les matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $P = Q + iR$. Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \to & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & \text{dét } (Q+zR) \end{array}$ est un polynôme non nul.]

Exercice 41. — Montrer que le sous-espace des matrices diagonalisables est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$. Quel est l'intérieur de l'espace des matrices diagonalisables ?
Le sous-espace des matrices diagonalisables (resp. trigonalisables) est-il dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$?

Exercice 42. — Quel est le nombre de classes de similitude de symétries dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$? En déduire que si $n \neq m$, alors les groupes $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et $\mathrm{GL}_m(\mathbf{C})$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 43. — Soit $0 \leqslant r \leqslant n$. Montrer que l'ensemble des projecteurs de rang r dans $\mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$ est connexe par arcs. Et dans $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$?
[**Indication:** C'est une classe de similitude de matrices...]

Exercice 44. — Soient $M \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ et $N \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$.

a) Montrer que la classe de similitude de M est connexe.

b) Montrer que la classe de similitude (dans $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$) de N n'est pas connexe ssi $\mathrm{Stab}_N := \{P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}),\ PNP^{-1} = N\} \subset \mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$ et que dans ce cas elle a 2 composantes connexes.

Exercice 45. — Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$. Montrer que la classe de conjugaison de A dans $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ est fermée si et seulement si A est diagonalisable.

Exercice 46. — Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que la série $\sum_k A^k$ est convergente ssi $A^n \to 0$.

Exercice 47. — Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que dans la réduction de Jordan de A il y a autant de blocs pour une valeur propre $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ que pour sa conjuguée $\overline{\lambda}$.

Exercice 48. — Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, on définit une matrice par blocs $\Delta(A) := \begin{bmatrix} 0 & A \\ \mathrm{Id}_n & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbf{C})$. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$.

a) Montrer que les matrices $\Delta(A)$ et $\Delta(B)$ sont *équivalentes* ssi A et B le sont.

b) Montrer que les matrices $\Delta(A)$ et $\Delta(B)$ sont *semblables* ssi A et B le sont.
[**Indication:** Pour montrer $\Delta(A) \sim \Delta(B) \implies A \sim B$, on pourra calculer $\Delta(A)^2$ et utiliser le théorème de Jordan.]

IV. Décomposition de DUNFORD

Exercice 49. — Soit u un endomorphisme de polynôme caractéristique scindé ($\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$).

a) En décoposant $\frac{1}{\chi_u}$ en élément simples montrer qu'on obtient des polynômes Q_i tels que $1 = \sum_{i=1}^r Q_i P_i$, où $P_i = \prod_{j=1, j\neq i}^r (X - \lambda_j)^{\alpha_j}$. Montrer que $\pi_i = P_i Q_i(u)$ est le projecteur sur l'espace caractéristique associé à λ_i. En déduire que $d = \sum_i \lambda_i \pi_i$ et $n = u - d$.

b) Calculer la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Exercice 50. — Dans la méthode précédente, on a besoin de savoir factoriser un polynôme annulateur de u pour trouver les projecteurs spectraux puis d et n. On va voir une méthode ou une telle factorisation n'est pas utile. On reprend les notations de l'exercice précédent.

a) Montrer que le polynôme minimal de d est $P = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$ et que si k est de caractéristique 0 alors on a $P = \chi_u / (\chi_u \vee \chi_u')$. Comment calculer P sans factoriser χ_u ?
On va donc chercher d dans $K[u]$ solution de $P(d) = 0$. Pour cela on applique la méthode de Newton. On pose $u_0 = u$ et $u_{n+1} = u_n - P(u_n) \circ (P'(u_n))^{-1}$.

b) On suppose $r \geqslant 2$. Montrer qu'il existe $Q \in K[X, Y]$ tel que

$$P(Y) = P(X) + (Y - X)P'(X) + (Y - X)^2 Q(X, Y)$$

c) Montrer que si $a \in k[u]$ est inversible dans $k[u]$ et $b \in k[u]$ est nilpotente, alors $a + b$ est inversible dans $k[u]$.

d) Montrer que $P'(u)^{-1}$ est un polynôme en u et que $P(u)$ est nilpotent. En déduire que u_1 est bien défini et un polynôme en u, que $P(u_1)$ est nilpotent et que $P'(u_1)^{-1}$ est un polynôme en u. Itérer le procédé pour montrer que les u_i sont bien définis pour tout $i \in \mathbf{N}$ et des polynômes en u.

e) Montrer que pour tout $l \geqslant 0$, $P(u_l) = P(u)^{2^l} v_l$ avec $v_l \in k[u]$. En déduire que la suite (u_l) est stationnaire, que la limite u_∞ est diagonalisable et que $u - u_\infty$ est nilpotent. En déduire que $d = u_\infty$ et $n = u - u_\infty$.

V. Sous-espaces stables

Exercice 51. — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Quels sont les sous-espaces stables de u de dimension 1 ?

Exercice 52. — Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbf{R})$.
Montrer que $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ est stable par A. Admet-il un supplémentaire stable ?

Exercice 53. — Soit E de dimension finie. Que dire d'un $u \in \mathcal{L}(E)$ qui stabilise tous les sous-espaces de E ?

Exercice 54. — Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que A admet un sous-espace stable de dimension 1 ou 2. Donner un exemple de A qui n'admet pas de sous-espace stable de dimension 1.

Exercice 55. — Soient u un endomorphisme de E, E_i les sous-espaces caractéristiques de u et $F \subset E$ un sous-espace stable par u.

a) Montrer que l'on a $F = \bigoplus_i (E_i \cap F)$ et que, pour tout i, $E_i \cap F$ est stable.

b) Montrer que si u est diagonalisable alors les sous-espaces de E stables par u sont les sommes directes des sous-espaces des espaces propres.
En déduire que u est semi-simple : tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable.

Exercice 56. — Soient A et B deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ qui commutent.

a) Montrer que les espaces propres et les espaces caractéristiques de A sont stables par B.

b) Montrer que A et B sont trigonalisables dans une même base.

c) On suppose que A et B sont diagonalisables. Montrer que A et B sont simultanément diagonalisables.

d) Généraliser à une famille d'endomorphismes qui commutent.

e) Peut-on simultanément "jordaniser" A et B ?
[**Indication:** Considérer le cas $A = J_n$ et $B = J_n^2$.]

Exercice 57. — Soient u un endomorphisme de E de dimension finie.

a) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Les seuls sous-espaces de E stables par u sont 0 et E.

(ii) Le polynôme caractéristique de u est irréductible.

b) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Tout sous-espace de E stable par u admet un supplémentaire stable par u.

(ii) Le polynôme minimal de u est sans facteur carré.

Exercice 58. — **Décomposition de Frobenius**
On reprend les notations de l'exercice ***10***. Soit $x \in E$ tel que $\pi_x = \pi_u$. La famille $\{e_1 := x, e_2 := u(x), \dots, e_d := u^{d-1}(x)\}$ ($d = \deg \pi_u$) est une famille libre de E ; on la complète en une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E. On note $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ la base duale.

a) Soit $F = \{e_d^* \circ u^i,\ i \in \mathbf{N}\}^\perp$. Montrer que F est stable par u.

b) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} k[u] & \to & E^* \\ P(u) & \mapsto & e_d^* \circ P(u) \end{array}$$

est injective. En déduire que $\dim F = n - d$ puis que $E = E_x \oplus F$.

c) Si P est un polynôme, on note $C(P)$ la matrice compagnon associée. Déduire de ce qui précède qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est une matrice diagonale par blocs $\begin{bmatrix} C(P_1) & & & 0 \\ & C(P_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C(P_k) \end{bmatrix}$ avec $P_k \mid P_{k-1} \mid \dots \mid P_1 = \pi_u$.

d) Si π_u est scindé, faire le lien avec la décomposition de Jordan.

e) Montrer que les polynômes P_i sont uniques : s'il existe une autre base dans laquelle la matrice de u est $\operatorname{diag}(C(Q_1), \dots, C(Q_l))$ avec $Q_l \mid \dots \mid Q_1$, alors $l = k$ et $\forall i,\ Q_i = P_i$.

VI. Exponentielle matricielle

Exercice 59. — Montrer que pour tout $M \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, on a dét $\exp(\mathrm{M}) = \exp(\operatorname{tr}(M))$.
Est-ce encore valable pour $M \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$?

Exercice 60. — Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ (dépendant de A) tel que l'on ait $\exp(A) = P(A)$.
Préciser P lorsque A est diagonalisable.

Exercice 61. — **a)** Montrer que l'exponentielle (complexe ou réelle) envoie *homéomorphiquement* l'ensemble des matrices nilpotentes sur l'ensemble des matrices unipotentes (*i.e.* de la forme $\mathrm{id} + N$ avec N nilpotente).
[**Indication:** Pour $n \geqslant 1$, soient les polynômes $E_n := 1 + X + \dots + \frac{X^n}{n!}$ et $L_n := X - \dots + (-1)^{n+1}\frac{X^n}{n}$. Montrer qu'il existe des polynômes $P_n, Q_n \in \mathbf{C}[X]$ tels que l'on ait $E_n \circ L_n = 1 + X + X^n P_n$ et $L_n \circ (E_n - 1) = X + X^n Q_n$.]

b) En déduire que l'application $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est surjective.
Plus précisément, montrer que pour tout $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, il existe un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $M = \exp(P(M))$.

c) L'exponentielle complexe est-elle injective ?

d) L'application $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est-elle surjective (resp. injective) ?
Montrer que $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est dans l'image de l'exponentielle ss'il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $M = A^2$.
[**Indication:** Pour la réciproque, écrire $A = \exp(B)$ avec $B = P(A) \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ comme en *a)*. On a $M = A\overline{A}$.]

e) Les matrices suivantes sont-elles dans l'image de l'exponentielle réelle :

$$-\mathrm{id}_n, \qquad A := \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

Exercice 62. — **Une preuve topologique de la surjectivité de l'exponentielle**
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ dont on veut trouver un antécédent par l'exponentielle. Notons $\mathcal{A} := \mathbf{C}[A]$ la sous-algèbre de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ et $\mathcal{A}^\times := \mathcal{A} \cap \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

a) Montrer que $\mathcal{A}^\times$ est un ouvert connexe de $\mathcal{A}$.

b) Montrer que l'image $\exp(\mathcal{A})$ est un sous-groupe de $\mathcal{A}^\times$ qui contient un voisinage ouvert de l'identité.
[**Indication:** Utiliser le théorème d'inversion locale.]

c) En déduire que $\exp(\mathcal{A})$ et son complémentaire sont ouverts.

d) Conclure qu'il existe $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $\exp(P(A)) = A$.

Exercice 63. — Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$.

a) Calculer la décomposition de Dunford de $\exp(A)$ en fonction de celle de A.

b) En déduire que A est diagonalisable ssi $\exp(A)$ l'est.

c) Donner tous les antécédents par l'exponentielle complexe de id_n.

Exercice 64. — **Sous-groupes à un paramètre**
Soit $f : (\mathbf{R}, +) \to (\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \cdot)$ un morphisme de groupes continu. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ telle que l'on ait : $\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) = \exp(tM)$.

a) Que aut $f(0)$?

b) Montrer le résultat en supposant f dérivable.

c) Montrer que pour tous $s, t \in \mathbf{R}$ et pour tout $a > 0$, on a $f(s)\int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \int_s^{s+a} f(t)\mathrm{d}t$.

d) Montrer que pour a suffisamment petit, $\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$ est inversible. En déduire que f est dérivable et conclure.
[**Indication:** Montrer que pour a petit, $\frac{1}{a}\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$ est proche de id_n.]