Examen du 31 janvier 2019

1 heure 30

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la concision de la rédaction.
L'utilisation de calculatrice, de téléphone portable et autre gadget est interdite.

Exercice 1. — Les questions de cet exercice sont indépendantes entre elles.

1) Existe-t-il des entiers $a, b, c \in \mathbf{Z}$ tels que l'on ait (dans $\mathbf{Q}$) :

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{5} = \frac{1}{7}?$$

2) Soit m et $n \in \mathbf{Z}$ deux entiers et δ leur pgcd.
Montrer que tout diviseur commun de m et n est un diviseur de δ.

* *
*

Exercice 2. — **Carrés de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.**
Soit p un nombre premier.

1) Combien y a-t-il de carrés dans $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$?
(Attention au cas $p = 2$...)

Pour $x \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$, on note $\left(\frac{x}{p}\right)$ le symbole de Legendre qui vaut par définition 1 si x est un carré et -1 sinon.

2) Pour $p > 2$, montrer l'égalité dans $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$: $\left(\frac{x}{p}\right) = x^{\frac{p-1}{2}}$.

3) Montrer que -1 est un carré de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ ssi $p = 2$ ou $p \equiv 1[4]$.

Dans la suite, on admet que 2 est carré de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ ssi $p = 2$ ou $p \equiv \pm 1[8]$.

4) Pour quels nombres premiers p, -2 est-il un carré de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$?

Exercice 3. — Le but de cet exercice est d'étudier l'ensemble Σ suivant :

$$\Sigma := \{n \in \mathbf{N}, \exists\, a, b \in \mathbf{Z},\ n = a^2 + 2b^2\}.$$

Pour cela, on considère le sous-anneau $A = \mathbf{Z}[i\sqrt{2}] := \{a + ib\sqrt{2}, a, b \in \mathbf{Z}\} \subset \mathbf{C}$.
On note $N : A \to \mathbf{N}$ l'application $a + ib\sqrt{2} \mapsto a^2 + 2b^2$.

Partie I : étude de l'anneau A.

1) Montrer que N est multiplicative, c'est-à-dire que pour tous $z_1, z_2 \in A$, on a $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$.

2) Montrer que A est intègre et déterminer l'ensemble de ses éléments inversibles.

3) Montrer que l'anneau A est euclidien relativement à l'application N.

4) Écrire une division euclidienne dans A de $7 + 2i\sqrt{2}$ par $-5 + 4i\sqrt{2}$.

5) Soit $z \in A$ un élément tel que $N(z)$ soit un entier premier. Montrer que z est irréductible dans A.

Partie II : étude des premiers dans Σ.

6) Soit $p \in \mathbf{N}$ un nombre premier. Montrer que p appartient à Σ ssi p est réductible dans l'anneau A.

7) Montrer que p est réductible dans A ssi -2 est un carré dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

8) Quelle est la décomposition en produits d'irréductibles de A des éléments suivants :

i) 2 **ii)** 3 **iii)** 5.

Partie III : Conclusion

9) Montrer que Σ est stable par multiplication, c'est-à-dire que pour tous m, $n \in \Sigma$, l'entier mn est encore dans Σ.

10) Soit $n \in \Sigma$ et p un diviseur premier de n. Montrer que si p est irréductible dans A alors $p^2 | n$ et $\frac{n}{p^2} \in \Sigma$.

11) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur la décomposition en facteurs premiers d'un entier n pour qu'il appartienne à Σ.