Examen du 1er mars 2019

1 heure 30

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la concision de la rédaction.
L'utilisation de calculatrice, de téléphone portable et autre gadget est interdite.

Exercice 1. — Les questions de cet exercice sont indépendantes entre elles.

1) Soit K un corps et $P \in K[X]$ un polynôme non nul.
Montrer que l'anneau quotient $K[X]/(P)$ est un corps ssi P est irréductible.

2) Énoncer (sans le démontrer) le critère d'irréductibilité d'Eisenstein pour les polynômes à ceofficients dans un anneau factoriel.
Application : montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, le polynôme $YX^n + Y^n - 1$ est irréductible dans $\mathbf{Z}[X, Y]$.

3) Soit $K \subset L$ une extension et $a \in L$ un élément tel que $[K(a) : K]$ soit un entier impair. Montrer qu'alors $K(a) = K(a^2)$.

* *
*

Exercice 2. — Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien.

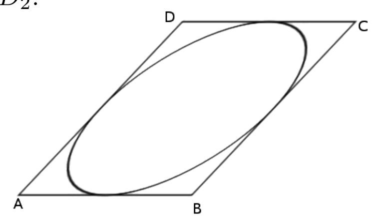
1) Montrer que pour des points A, B, C, D de $\mathcal{P}$, on a équivalence entre $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
Dans ce cas et lorsque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont non colinéaires, on dit que $ABCD$ est un parallélogramme non aplati.

2) Rappeler la définition du groupe affine $GA(\mathcal{P})$.

3) Soient $f \in GA(\mathcal{P})$ et $ABCD$ est un parallélogramme non aplati de $\mathcal{P}$. Montrer que $f(A)f(B)f(C)f(D)$ est un parallélogramme non aplati.

4) Soient $A_1B_1C_1D_1$ et $A_2B_2C_2D_2$ deux parallélogrammes non aplatis. Montrer qu'il existe $f \in GA(\mathcal{P})$ envoyant $A_1B_1C_1D_1$ sur $A_2B_2C_2D_2$.

5) En déduire que tout parallélogramme non aplati possède une ellipse qui est tangente à ses côtés en leurs milieux.
[**Indication:** Commencer par traiter le cas d'un carré.]



Exercice 3. — Soit $q = p^n$ une puissance d'un nombre premier et $\mathbf{F}_q$ "le" corps à q éléments.

1) Soit $A = X^{q-1} - 1 \in \mathbf{F}_q[X]$. Quelle est la décomposition de A en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbf{F}_q[X]$?

2) En utilisant les relations coefficients racines pour le polynôme A, calculer $\sum_{\alpha \in \mathbf{F}_q} \alpha^2$.

* *
*

Exercice 4. — Soit k un corps et Q un polynôme de $k[X]$ de degré $n > 0$.

1) Montrer que Q est irréductible dans $k[X]$ ssi Q n'a aucune racine dans toute extension $k \subset L$ de degré $[L : k] \leqslant \frac{n}{2}$.

2) Dans cette question, $k = \mathbf{F}_p$ est un corps fini et $n = 4$.
Montrer que Q est irréductible dans $\mathbf{F}_p[X]$ ssi Q se décompose dans $\mathbf{F}_{p^2}[X]$ en un produit de deux polynômes irréductibles de degré 2.