Examen du 26 février 2019

1 heure 30

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la concision de la rédaction.
L'utilisation de calculatrice, de téléphone portable et autre gadget est interdite.

Exercice 1. — Les questions de cet exercice sont indépendantes entre elles.

1) Soient $K \subset L$ une extension de corps et $x, y \in L$ deux éléments algébriques sur K de degrés respectifs m et n.

- **i)** Rappeler la définition du corps $K[x, y]$ et montrer que l'on a $[K[x, y] : K] \leqslant mn$.
- **ii)** Si m et n sont premiers entre eux, montrer qu'on a $[K[x, y] : K] = mn$.

2)
- **i)** Rappeler la définition d'une réflexion par rapport à un hyperplan affine dans un espace affine euclidien.
- **ii)** Dans $\mathbf{R}^3$, montrer que la composée de deux réflexions est une rotation ou une translation.
- **iii)** Montrer que c'est une translation ssi les deux plans sont parallèles.

3)
- **i)** Rappeler la définition des polynômes cyclotomiques Φ_n.
- **ii)** Enoncer (sans la démontrer) l'identité qui relie $X^n - 1$ aux polynômes cyclotomiques.
- **iii)** Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\Phi_n \in \mathbf{Z}[X]$.
- **iv)** Montrer que l'on a $\Phi_2(X) = -\Phi_1(-X)$.
- **v)** Montrer que si $n \geqslant 3$ est un entier *impair*, alors $\Phi_{2n}(X) = \Phi_n(-X)$.

4) Exprimer à partir des polynômes symétriques élémentaires :

$$X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2.$$

5) Soit p un nombre premier, $q = p^n$ et $\mathbf{F}_q$ un corps fini à q éléments. Pour $\alpha \in \mathbf{F}_q$, on pose

$$N(\alpha) = \alpha \cdot \alpha^p \cdot \alpha^{p^2} \dots \alpha^{p^{n-1}}.$$

Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbf{F}_q$, on a $N(\alpha) \in \mathbf{F}_p$.

* *
*

Exercice 2. — Pour tout $n \geqslant 1$, on note $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique. Ce groupe agit naturellement sur l'algèbre des polynômes $\mathcal{A}_n := \mathbf{Q}[X_1, \dots, X_n]$ en permutant les variables.
On dit que $P \in \mathcal{A}_n$ est *antisymétrique* s'il vérifie :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \sigma \cdot P = \varepsilon(\sigma) P,$$

où $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$ désigne la signature

1) Montrer que $U_n := \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (X_i - X_j) \in \mathcal{A}_n$ est antisymétrique.

2) En identifiant $\mathcal{A}_n$ avec $\mathcal{A}_{n-1}[X_n]$, montrer que si P est antisymétrique, ses coefficients sont aussi antisymétriques (pour l'action de $\mathfrak{S}_{n-1}$ sur $\mathcal{A}_{n-1}$).

3) Si $P \in \mathcal{A}$ est antisymétrique, montrer que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on a $P(X_1, \dots, X_{n-1}, X_i) = 0$. Quelle divisibilité de P en déduit-on ?

4) En déduire que tout polynôme antisymétrique $P \in \mathcal{A}_n$ s'écrit de manière unique $P = U_n \cdot Q$ avec Q symétrique.