Examen du 16 mars 2022

1 heure 30

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la concision de la rédaction.
L'utilisation de calculatrice, de téléphone portable et autre gadget est interdite.

Exercice 1. — Les questions de cet exercice sont indépendantes entre elles.

1) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, le polynôme $X^nY^n + (Y+1)(X+1)$ est irréductible dans $\mathbf{Z}[X,Y]$.

2) Soit $q := p^n$ une puissance d'un nombre premier. On propose deux méthodes pour montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbf{F}_q[X]$, le polynôme $X^q - X$ divise $P^q - P$.

- **i) 1ère méthode :** utiliser, en la justifiant, la factorisation de $X^q - X$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbf{F}_q[X]$.
- **ii) 2nde méthode :** Montrer que l'on a $P(X)^q = P(X^q)$ dans $\mathbf{F}_q[X]$, puis travailler dans l'anneau quotient $\mathbf{F}_q[X]/(X^q - X)$.

3) Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels. Montrer que pour tout point $y \in F$, l'ensemble $f^{-1}(y)$ est un sous-espace affine de E (dont on précisera la direction).

4) A quelle condition sur les paramètres $a, b, c \in \mathbf{R}$, la conique $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 - y^2 + ax + by + c = 0$ est-elle non-dégénérée [1] ? Préciser la nature géométrique des points $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ selon que $\mathcal{C}$ est dégénérée ou non.

1. On dit aussi propre.

Exercice 2. — Soit $K \subset L$ une extension de dimension finie $n \geqslant 1$. On se fixe un élément $x \in L$.

1) Montrer qu'il existe un polynôme *non nul* $P \in K[X]$ tel que $P(x) = 0$.

2) Montrer qu'il existe un *unique* polynôme *unitaire* $\pi_x \in K[X]$ tel que pour tout polynôme $P \in K[X]$, on ait :

$$P(x) = 0 \qquad \text{ssi} \qquad \pi_x \mid P.$$

3) Montrer que l'entier $d := \deg(\pi_x)$ divise n.

Dans la suite, on note

$$M : \begin{array}{ccc} L & \to & L \\ a & \mapsto & ax \end{array}$$

On admet (et c'est facile) que M est une application K-linéaire. On note $\chi := \text{dét}(X\text{Id} - M) \in K[X]$ son polynôme caractéristique. On rappelle que $K[x]$ est un sous-corps de L. On peut donc voir L comme un $K[x]$ espace vectoriel (de dimension finie). Soit alors $a_1, \dots, a_r \in L$ une base de L comme $K[x]$-ev.

4) Montrer que les $a_iK[x] := \{a_iy,\ y \in K[x]\}$ sont des sous-K-ev de L stables par M.

5) En déduire qu'il existe un entier s que l'on précisera tel que $\chi_x = \pi_x^s$.