Examen du 17 février 2023

2 heures

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la concision de la rédaction.
L'utilisation de calculatrice, de téléphone portable et autre gadget est interdite.

Exercice 1. — Soient $m, n \geqslant 1$ des entiers et $p \in \mathcal{P}$ un nombre premier.

1) Montrer que si $m|n$ alors $X^m - 1|X^n - 1$ (dans $\mathbf{Z}[X]$).

2) En déduire que si $m|n$, alors $X^{p^m} - X|X^{p^n} - X$ (dans $\mathbf{Z}[X]$).

3) Montrer que “le” corps de décomposition $\mathbf{F}_{p^n} := \mathrm{D}_{\mathbf{F}_p}(X^{p^n} - X)$ est un corps fini à p^n éléments.

4) Lorsque $m|n$, montrer que $\mathbf{F}_{p^n}$ admet un unique sous-corps à p^m éléments.

5) Soit $Q \in \mathbf{F}_p[X]$ un polynôme irréductible de degré $d \geqslant 1$.
Montrer que Q admet une racine dans $\mathbf{F}_{p^n}$ ssi $d \mid n$.
[On pourra utiliser librement l'unicité à isomorphisme près des corps finis.]

6) En déduire que tout polynôme de $\mathbf{F}_p[X]$ de degré 5 admet une racine dans $F_{p^{10}}$.
[**Indication:** Considérer la factorisation en irréductibles d'un tel polynôme.]

* *
*

Exercice 2. — On étudie l'irréductibilité de quelques polynômes.
Les deux questions sont indépendantes.

1) Soit $P = X^4 + X + 1 \in \mathbf{Z}[X]$.

- **i)** Montrer que P n'a pas de racine dans $\mathbf{Q}$.
- **ii)** Déterminer la factorisation de sa réduction modulo 3, $\overline{P} \in \mathbf{F}_3[X]$.
- **iii)** En déduire que P est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$.

2)
- **i)** Factoriser le polynôme X^3+Y^3 en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbf{C}[X,Y]$, puis dans $\mathbf{Q}[X,Y]$.
- **ii)** En déduire que le polynôme $X^3 + Y^3 + Z^3$ est irréductible dans $\mathbf{Z}[X,Y,Z]$.
[**Indication:** Penser au critère d'******.]

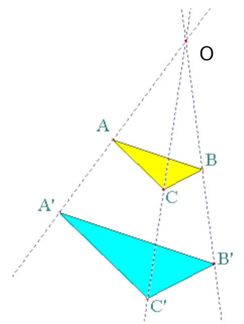
Exercice 3. — Soit $(\mathcal{E}, E)$ un espace affine.

1) Pour $P \in \mathcal{E}$, rappeler la définition de l'homothétie affine de centre P et de rapport λ, notée $h_{P,\lambda}$.

2) Pour $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, montrer que $h_{P,\lambda}(\mathcal{F})$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ (fortement) parallèle à $\mathcal{F}$.

3) **[Desargues]** Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles sans sommet commun de $\mathcal{E}$ et à côtés deux à deux parallèles[1].

- **i)** Montrer que les quatre points A, A', B, B' sont coplanaires.



Dans la suite, on suppose que les droites (AA') et (BB') sont concourantes et on note O leur point d'intersection.
On pose $\lambda = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$.

- **ii)** Montrer que $h_{O,\lambda}$ envoie B sur B'.
- **iii)** Montrer que $h_{O,\lambda}$ envoie C sur C'.
- **iv)** En déduire que $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes.

1. C'est à dire que $(AB) /\!/ (A'B')$, $(BC) /\!/ (B'C')$ et $(AC) /\!/ (A'C')$.