Géométrie

I. Géométrie affine

Exercice 1. — Soit $(\mathcal{E}, E)$ un espace affine et $(\mathcal{F}, F)$ et $(\mathcal{G}, G)$ deux sous-espaces affines.

a) Montrer que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ ssi pour tous points $M \in \mathcal{F}$, et $N \in \mathcal{G}$, on a $\overrightarrow{MN} \in F + G$.

b) Montrer que si F et G sont supplémentaires alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est réduit à un point.
Que penser de la réciproque ?

Exercice 2. — Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E.

a) Montrer que pour des points A, B, C, D de $\mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ssi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. On dit alors que $ABCD$ est un parallélogramme.

b) Soient A, B, C, D quatre points non alignés de $\mathcal{E}$. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme ssi $(AB) /\!/ (CD)$ et $(AD) /\!/ (BC)$.

c) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme ssi ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu.

Exercice 3. — Dans $\mathbf{R}^3$, donner une équation cartésienne du plan affine passant par le point $A\,(1, 0, 1)$ et de direction engendrée par $\vec{u} := \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 4. — **[Applications affines]**
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E.

a) Quelles sont les applications affines $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$? de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$?

b) Montrer qu'une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est bijective ssi sa partie linéaire $\vec{f}$ l'est.

c) Montrer que $f \mapsto \vec{f}$ définit un morphisme de groupes surjectif $\mathrm{GA}(\mathcal{E}) \to \mathrm{GL}(E)$. Quel est son noyau ?

d) Montrer que l'image par f d'un sous-espace affine $(\mathcal{F}, F)$ est affine. Quelle est sa direction ?

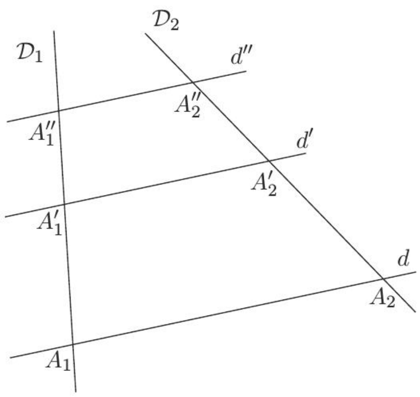
e) Montrer qu'une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ admet un unique point fixe ssi 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$.
Dans le cas contraire, montrer que l'ensemble des points fixes peut être vide ou infini.

f) Quelle est l'utilité de la notion de repère affine pour définir des applications affines ?

g) Soit f une application affine telle que $f^2 = \mathrm{id}$. Montrer que f est une symétrie.

h) Pour $\vec{u} \in E$, soit $t_{\vec{u}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ la translation de vecteur $\vec{u}$. Montrer que pour toute application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $f \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{f}(\vec{u})} \circ f$.

Exercice 5. — **[Théorème de Thalès]**
Soient d, d' et d'' trois droites parallèles distinctes, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites dont aucune n'est parallèle à d. Soient (pour $i = 1$ ou 2) $A_i = \mathcal{D}_i \cap d$, $A'_i = \mathcal{D}_i \cap d'$, $A''_i = \mathcal{D}_i \cap d''$.



a) Montrer qu'on a l'égalité : $\frac{\overline{A_1 A''_1}}{\overline{A_1 A'_1}} = \frac{\overline{A_2 A''_2}}{\overline{A_2 A'_2}}$.
[**Indication:** Utiliser la projection sur $\mathcal{D}_1$ parallèlement à d.]

b) Réciproquement, montrer que si un point B vérifie $\frac{\overline{A_1 B}}{\overline{A_1 A'_1}} = \frac{\overline{A_2 A''_2}}{\overline{A_2 A'_2}}$, alors B est A''_1.

c) Retrouver la version du théorème de Thalès de votre enfance.

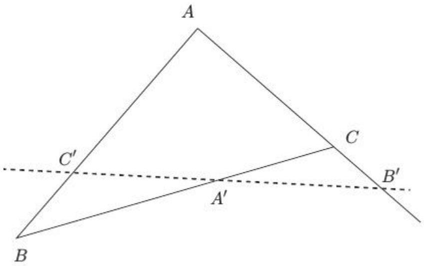
Exercice 6. — **[Groupe des homothéties-translations]** Soit $(\mathcal{E}, E)$ un espace affine.

a) Quel est le sous-groupe de $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$ engendré par les homothéties ?

b) Soient $h(A, \alpha)$, $h(B, \beta)$ et $h(C, \gamma)$ trois homothéties de $\mathcal{E}$ dont la composée est l'identité. Montrer que A, B et C sont alignés et que $\alpha\beta\gamma = 1$.

c) Quelles sont les applications affines $f \in \mathrm{GA}(\mathcal{E})$ telles que pour toute droite $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ on ait $f(\mathcal{D}) \mathbin{/\!/} \mathcal{D}$?

Exercice 7. — **[Théorème de Menelaüs]**
Soient ABC un triangle, A' , B' et C' des points des droites (BC), (CA) et (AB).



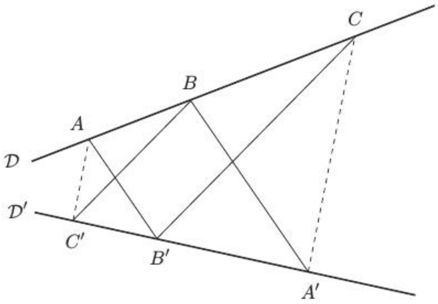
a) Montrer que A' , B' et C' sont alignés ssi on a l'égalité :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

[**Indication:** Considérer les homothéties de centre A' (resp. B', C') et de rapport $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$ (resp $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$,$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$) et utiliser l'Ex. ***6.***]

b) Si A', B' et C' sont alignés, soient A'', B'' et C'' leurs symétriques par rapport aux milieux des côtés concernés. Montrer que A'', B'' et C'' sont alignés.

Exercice 8. — **[Théorème de Pappus]**



Soient A, B, C trois points d'une droite $\mathcal{D}$ et A' , B' , C' trois points d'une droite $\mathcal{D}'$ distincte de $\mathcal{D}$. Montrer que si (AB') est parallèle à (BA') et (BC') est parallèle à (CB'), alors (AC') est parallèle à (CA').
[**Indication:** Distinguer les cas selon que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont concourantes ou non.]
La réciproque est-elle vraie ?

II. Barycentres – coordonnées barycentriques

Exercice 9. — Soit $A_0, \ldots, A_n$ un repère affine de $\mathbf{R}^n$.

a) Pour $M \in \mathbf{R}^n$, comment calcule-t-on "les" coordonnées barycentriques de M ?

b) Pour $n = 2$, soient $M'(x', y', z')$ et $M''(x'', y'', z'')$ deux points distincts. Montrer qu'un point $M(x, y, z)$ appartient à la droite $(M'M'')$ ssi $\begin{vmatrix} x' & x'' & x \\ y' & y'' & y \\ z' & z'' & z \end{vmatrix} = 0$.
En déduire qu'une équation de droite en coordonnées barycentriques est du type $ux+vy+wz = 0$, avec u, v, w non tous trois égaux. On note cette droite $\mathcal{D}(u, v, w)$.

c) A quelle condition les droites $\mathcal{D}(u, v, w)$ et $\mathcal{D}(u', v', w')$ sont-elles égales ? parallèles ?
Quand elles ne sont pas parallèles, quel est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$?

d) Montrer que les trois droites $\mathcal{D}(u, v, w)$, $\mathcal{D}(u', v', w')$ et $\mathcal{D}(u'', v'', w'')$ sont concourantes ou parallèles ssi $\begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{vmatrix} = 0$.

Exercice 10. — Redémontrer le théorème de Menelaüs en utilisant des coordonnées barycentriques.

Exercice 11. — Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Montrer qu'un sous-ensemble $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine ssi pour toute famille de points $A_i \in \mathcal{F}$ et pour toute famille de poids λ_i telle que $\sum_i \lambda_i \neq 0$, le barycentre $\mathrm{Bar}_i(A_i, \lambda_i)$ est dans $\mathcal{F}$.

Exercice 12. — Montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes. Quelle est la position relative de ce point d'intersection sur les médianes ?
Quelle est la généralisation naturelle de ces énoncés à un tétraèdre ?

Exercice 13. — Montrer que toute application affine d'ordre fini admet un point fixe.

III. Géométrie affine euclidienne

Exercice 14. — Soient A, B, C, D quatre points de l'espace $\mathbf{R}^3$, muni de sa structure euclidienne usuelle. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathbf{R}^3$ tels que :

a) $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}) = 0$ **b)** $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 0$

c) $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$

Exercice 15. — Que vaut la somme des angles dans un polygône à n côtés ?

Exercice 16. — Démontrer que les médiatrices (resp. les bissectrices, resp. les hauteurs) d'un triangle sont concourantes.

Exercice 17. — **[isométries du plan]**

a) Rappeler la liste des natures géométriques possibles pour une isométrie du plan.

b) Déterminer la nature des différentes composées ? (par exemple entre deux symétries glissées ?)

c) Donner la forme des isométries en tant qu'endomorphisme de $\mathbf{C}$.

Exercice 18. — Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan euclidien. On note $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\beta = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $\gamma = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. On convient également de noter $\rho(O, \theta)$ la rotation de centre O et d'angle θ.

a) Que vaut $\rho(A, 2\alpha) \circ \rho(B, 2\beta) \circ \rho(C, 2\gamma)$?

b) Montrer que $\rho(A, \alpha) \circ \rho(B, \beta) \circ \rho(C, \gamma)$ est la symétrie centrale de centre I, où I est la projection orthogonale sur (AC) du centre du cercle inscrit à ABC.

IV. Utilisation des nombres complexes

Exercice 19. — **a)** Montrer qu'une droite du plan complexe a toujours une équation du type $\mathcal{D} = \{z \in \mathbf{C}, \alpha z + \overline{\alpha z} + c = 0\}$ avec $\alpha \in \mathbf{C}$ et $c \in \mathbf{R}$.
Cette équation est-elle unique ?

b) De même, quelle est la forme d'une équation de cercle ? de conique ?

Exercice 20. — Soient M_1, M_2, M_3 trois points du plan d'affixes respectives z_1, z_2, z_3.

a) Montrer que les trois points sont alignés ssi dét $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \overline{z_1} & \overline{z_2} & \overline{z_3} \end{bmatrix}$ est nul. Quelle est l'équation de la droite (M_1M_2) ?

b) Quelle est l'aire du triangle $M_1M_2M_3$ en fonction du déterminant précédent ?

c) A quelle condition sur z_1, z_2, z_3, le triangle $M_1M_2M_3$ est-il isocèle (resp. rectangle) en M_1 ?

d) Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

i) $M_1M_2M_3$ est équilatéral ;

ii) $z_1 + jz_2 + j^2z_3 = 0$ ou $z_1 + j^2z_2 + jz_3 = 0$;

iii) $(z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 + (z_3 - z_1)^2 = 0$.

e) Montrer que dét $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z \\ \overline{z_1} & \overline{z_2} & \overline{z_3} & \overline{z} \\ |z_1|^2 & |z_2|^2 & |z_3|^2 & |z|^2 \end{bmatrix} = 0$ est l'équation du "cercle-droite" passant par M_1, M_2, M_3.

Exercice 21. — Montrer que 4 nombres complexes a, b, c, d sont cocycliques ou alignés ssi le "birapport" $\frac{(a-b)/(a-c)}{(d-b)/(d-c)}$ est réel.

Exercice 22. — **Inversions, [Audin]**
Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien, O un point de $\mathcal{P}$, et k un réel non nul. On appelle inversion de pôle O et de puissance k la transformation

$$i_{O,k} : \mathcal{P} - \{O\} \to \mathcal{P} - \{O\}$$

qui à tout point M associe le point M' de la droite (OM) vérifiant l'égalité $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$.

a) Montrer que $i_{O,k}$ ainsi définie est une involution de $\mathcal{P} - \{O\}$. Si on identifie $(\mathcal{P}, O)$ à $\mathbf{C}, 0)$, que vaut $i_{0,k}(z)$?

b) Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan passant par 0. Quelle est l'image par $i_{0,k}$ de $\mathcal{D} \setminus \{0\}$?

c) Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan ne passant pas par 0. Montrer que $i_{0,k}(\mathcal{D})$ est un cercle privé d'un point.
[**Indication:** Diviser une équation de $\mathcal{D}$ par $|z|^2$.]

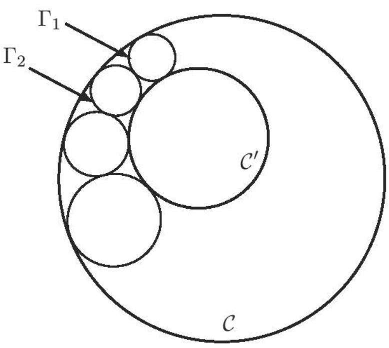
d) Quelle est l'image par $i_{0,k}$ d'un cercle ne passant pas par 0 ?

e) **Application 1 : inégalité de Ptolémée.**
Soient P, Q, R et S quatre points distincts du plan complexe. Montrer que leurs distances vérifient l'inégalité

$$PQ \cdot RS + PS \cdot QR \geqslant PR \cdot QS$$

avec égalité ssi P, Q, R et S sont cocycliques dans cet ordre.
[**Indication:** On peut supposer $z_S = 0$. Montrer que l'inégalité de Ptolémée est équivalente à une inégalité triangulaire. Pour le cas d'égalité, considérer l'inversion $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$.]

f) **Application 2 : Alternative de Steiner.**



Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles, avec $\mathcal{C}$ intérieur à $\mathcal{C}'$. Soit Γ_1 un cercle tangent intérieurement à $\mathcal{C}'$ et extérieurement à $\mathcal{C}$. On construit par récurrence une suite de cercles Γ_i de sorte que Γ_{i+1} soit tangent intérieurement à $\mathcal{C}'$, extérieurement à $\mathcal{C}$ et à Γ_i et différent de Γ_{i-1}. Montrer que si pour un certain n, $\Gamma_n = \Gamma_1$, alors le même résultat est vrai, pour le même n, avec n'importe quel choix de Γ_1.
[**Indication:** Le cas où $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont concentriques est facile. Montrer qu'il existe une inversion envoyant $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sur des cercles concentriques.]

V. Convexité

Exercice 23. — **Théorème de Gauss-Lucas.**
Soit $P \in \mathbf{C}[X]$. Le but de cet exercice est de montrer que les racines de P' sont contenues dans l'enveloppe convexe des racines de P. On note $P = c\prod_{i=1}^r (X - a_i)^{n_i}$.

a) Soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $P(z) \neq 0$. Montrer que l'on a

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{z - a_i}.$$

b) En déduire que si z est une racine de P' qui n'est pas racine de P on a

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{|z - a_i|^2}\right) \overline{z} = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{|z - a_i|^2} \overline{a_i}.$$

c) Conclure.

d) Si $\deg(P) \geqslant 2$, montrer que le barycentre des racines de P est le même que le barycentre des racines de P' (où chaque racine a pour poids sa multiplicité).

Exercice 24. — **[Théorème de Carathéodory]**

a) Soient $A_0, A_1, \dots A_{m+1}$ $m+2$ points affinement dépendants d'un espace affine réel $\mathcal{E}$. Montrer qu'il existe $m+2$ réels $\alpha_0, \dots, \alpha_{m+1}$ non tous nuls, de somme nulle, tels que le vecteur $\sum_{i=0}^{m+1} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$ soit nul pour tout point O de $\mathcal{E}$.

b) En déduire que tout barycentre à poids tous positifs des A_i peut s'écrire comme barycentre à poids tous positifs d'au plus $m+1$ de ces points.

c) Montrer que dans un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension n, l'enveloppe convexe d'une partie $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ est formée de l'ensemble des barycentres à poids tous positifs de famille d'au plus $n+1$ points de $\mathcal{A}$.

d) En déduire que si $\mathcal{A}$ est compacte, alors $\mathrm{Conv}(\mathcal{A})$ aussi.

e) Donner un exemple de fermé dont l'enveloppe convexe n'est pas fermée.

Exercice 25. — **[Lemme de Radon]**
Montrer que tout ensemble $\mathcal{A}$ de $m+2$ points de $\mathbf{R}^m$ admet une partition $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$ telle que $\mathrm{Conv}(\mathcal{A}_1) \cap \mathrm{Conv}(\mathcal{A}_2) \neq \emptyset$.

VI. Coniques affines

Exercice 26. — Donner les classifications affine et euclidienne des coniques non-dégénérées.
Comment reformuler cet énoncé en termes d'action de groupes ?
Comment la topologie intervient-elle dans la classification affine ?

Exercice 27. — **a)** Montrer que si une conique contient trois points alignés A, B, C alors elle contient toute la droite (AB).

b) Montrer que deux coniques non dégénérées s'intersectent en au plus quatre points.

Exercice 28. — **a)** Montrer que par 5 points "en position générale", il passe une unique conique.

b) Concrètement étant donnés 5 tels points (x_i, y_i) dans $\mathbf{R}^2$, montrer que l'équation affine de la conique passant par ces points est

$$\text{dét}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y \\ x_1y_1 & x_2y_2 & x_3y_3 & x_4y_4 & x_5y_5 & xy \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 & x^2 \\ y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & y_4^2 & y_5^2 & y^2 \end{bmatrix} = 0.$$

c) Donner un exemple de quintuplet de points par lequel ne passe aucune conique.

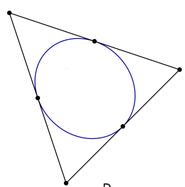
d) Comment caractériser grâce à l'équation précédente les coordonnées des quintuplets de points par lesquels il ne passe aucune conique.

e) Combien de points en "position générale" faut-il pour déterminer une quadrique en dimension 3 ?

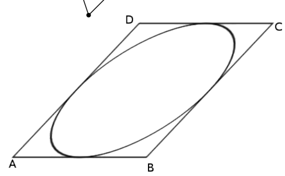
Exercice 29. — Comment écrit-on l'équation de la tangente en un point d'une conique donnée par son équation ?

Exercice 30. — Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien.

a) Montrer que tout triangle ABC non aplati possède une unique ellipse (dite *de Steiner*) qui est tangente à ses côtés en leurs milieux.
[**Indication:** Commencer par traiter le cas d'un triangle équilatéral.]



b) De même, montrer que tout parallélogramme non aplati possède une unique ellipse qui est tangente à ses côtés en leurs milieux.
[**Indication:** Commencer par traiter le cas d'un carré.]

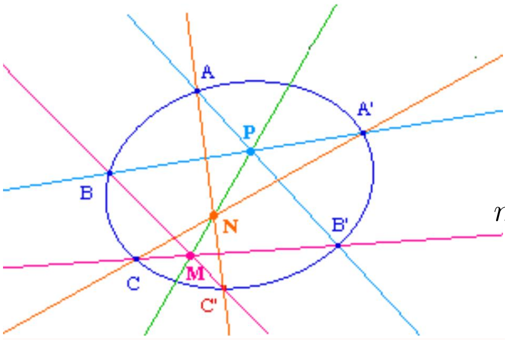


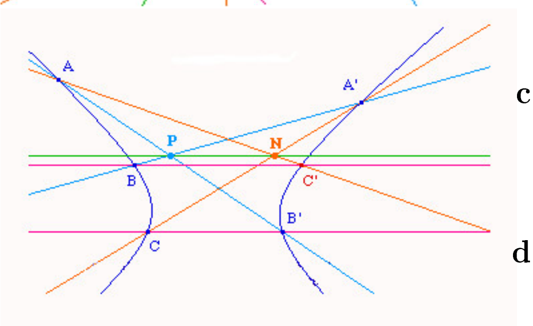
Exercice 31. — Montrer que l'équation d'une conique en coordonnées barycentriques est de la forme $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz = 0$.

Exercice 32. — Montrer que la droite qui joint le centre d'une ellipse au milieu d'une corde MM' passe par le point commun aux tangentes à l'ellipse en M et M'.
[**Indication:** Se ramener au cas où l'ellipse est un cercle !]

Exercice 33. — Montrer que 2 coniques affines non dégénérées sont semblables (c'est-à-dire dans la même orbite pour l'action du groupe des similitudes) ssi elles ont même excentricité.

Exercice 34. — **[Théorème de Pascal]**
Soient A, B, C, A', B', C' six points du plan tels qu'aucun triplet de point n'est aligné. On se propose de montrer qu'il existe une unique conique non dégénérée passant par ces 6 points ssi les "points d'intersection" $M := (BC') \cap (B'C)$, $N := (AC') \cap (A'C)$ et $P := (AB') \cap (A'B)$ sont alignés [1].
On travaille en coordonnées barycentriques liées au repère (A, B, C), et on note (a, a', a'') (resp. (b, b', b'') et (c, c', c'')) les coordonnées de A' (resp. B' et C').





a) Montrer qu'on a $aa'a''bb'b''cc'c'' \neq 0$.

b) Montrer que les coordonnées des "points" M, N et P sont :
$$m = (bc, cb', c''b), \qquad n = (c'a, c'a', c''a'), \qquad p = (ab'', a''b', a''b'').$$
En déduire que ces trois "points" sont "alignés" ssi
$$\begin{vmatrix} bc & cb' & c''b \\ c'a & c'a' & c''a' \\ ab'' & a''b' & a''b'' \end{vmatrix} = 0$$

c) Montrer que l'équation d'une conique passant par A, B, C est de la forme $\alpha xy + \beta yz + \gamma xy = 0$.
A quelle condition une telle conique passe-t-elle par $A', B'etC'$?

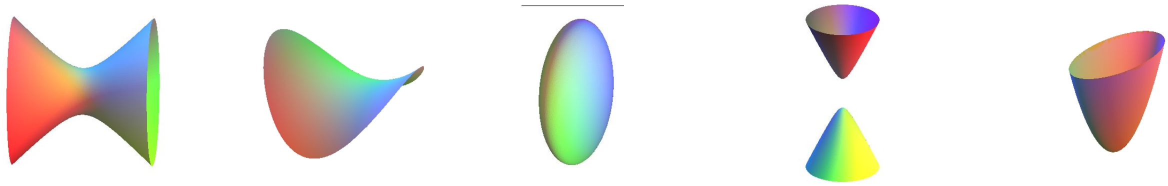
d) Conclure.

(Images volées sur `www.cabri.net`).

Exercice 35. — **a)** Montrer que la classification affine des quadriques non dégénérées en dimension 3 est :

- L'ellipsoïde, d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
- Le paraboloïde elliptique d'équation $x^2 + y^2 - z = 0$.
- Le paraboloïde hyperbolique d'équation $x^2 + y^2 - z = 0$.
- L'hyperboloïde elliptique à une nappe, d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
- L'hyperboloïde elliptique à deux nappes, d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = -1$.

Les reconnaître sur le dessin suivant :



(Images volées sur `www.mathcurve.com`).

Expliquer leurs noms.

b) Que devient la classification projective ?

1. Il faut autoriser ici des intersections à l'infini : par exemple, on autorise que les trois couples de droites soient parallèles ou bien qu'un seul couple de droites soit parallèle et que la droite passant par les deux autres points d'intersection soit parallèle au premier couple...