# Polynômes

## I. Polynômes à une indéterminée

***Exercice 1.*** — On suppose que $A$ est un anneau intègre.

**a)** Montrer que $A[X]$ est intègre.
L'anneau $\mathcal{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ est-il intègre ?

**b)** Déterminer l'ensemble des éléments inversibles de $A[X]$.

**c)** Mêmes questions pour l'anneau des séries formelles $A[[X]]$.

***Exercice 2.*** — Soit $Q \in A[X]$ un polynôme *unitaire* de degré $n$ (donc non nul !).

**a)** Montrer que pour tout $P \in A[X]$, il existe un unique couple $(B,R) \in A[X]^2$ avec $\deg R < n$ tel que l'on ait $P = BQ + R$.

**b)** Soient $P \in A[X]$ et $a \in A$. Montrer que $a$ est racine de $P$ ssi $X - a$ divise $P$ dans $A[X]$.
Montrer que $(X-a)^2$ divise $P$ ssi $a$ est racine commune de $P$ et $P'$.
Donner un critère pour que $(X-a)^k$ divise $P$ si $k!$ est inversible dans $A$.

**c)** En déduire que si $A$ est intègre, un polynôme de degré $d$ admet au plus $d$ racines dans $A$.
Pour $A$ non intègre, donner un contre-exemple.

**d)** Soit $P \in A[X,Y]$ un polynôme tel que l'on ait $P(X,X) = 0$. Montrer que $X - Y$ divise $P$.

***Exercice 3.*** — **a)** À quelle condition sur les paramètres $a,b,c \in k$ le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$ ?

**b)** Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, le polynôme $X^2 - X + 1$ divise $X^{2n+1} + (X-1)^{n+2}$.

***Exercice 4.*** — Soit $k$ un corps. Quels sont les idéaux premiers (resp. maximaux) de $k[X]$ ?

***Exercice 5.*** — **[Idéaux de $\mathbf{Z}[X]$]**

**a)** Montrer que pour tout $p$ premier, l'idéal $(p,X) \subset \mathbf{Z}[X]$ n'est pas principal.

**b)** Soit $p$ un entier premier et $P \in \mathbf{Z}[X]$ un polynôme dont la réduction $\overline{P} \in \mathbf{F}_p[X]$ est irréductible. Montrer que l'idéal $(p,P)$ est maximal dans $\mathbf{Z}[X]$.

Réciproquement, on se propose de montrer que tout idéal maximal de $\mathbf{Z}[X]$ est de la forme précédente. Soit donc $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de $\mathbf{Z}[X]$.

**c)** Montrer que $\mathfrak{m} \cap \mathbf{Z}$ est un idéal premier *non nul* de $\mathbf{Z}$.
[**Indication:** Pour montrer qu'il est non nul, remarquer que l'idéal $\langle \mathfrak{m} \rangle \subset \mathbf{Q}[X]$ est strict. En déduire que $\mathfrak{m}$ est principal.]

**d)** Conclure.

***Exercice 6.*** — Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ tels que

$$P(X^2) = P(X)P(X+1).$$

[**Indication:** Si $\alpha$ est une racine de $P$ , alors $\alpha^2$ et $(\alpha-1)^2$ aussi.]

***Exercice 7.*** — Montrer que toute fonction $f : \mathbf{Z}/p \to \mathbf{Z}/p$ est polynomiale.
Le polynôme représentant $f$ est-il unique ?

***Exercice 8.*** — **[Division selon les puissances croissantes]**
Soit $\mathcal{A}$ un anneau et $A, B \in \mathcal{A}[X]$ tels que $B(0) \in \mathcal{A}^\times$.

**a)** Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, il existe un unique couple de polynômes $Q, R \in \mathcal{A}[X]$ avec $\deg(Q) \leqslant n$ tel que $A = BQ + X^{n+1}R$.
[**Indication:** Montrer l'existence par récurrence descendante sur la valuation de $A$, c'est-à-dire $\min\{k,\ a_k \neq 0\}$.]

**b)** Soit $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que $f(x) = A(x) + O(x^{n+1})$ et $g(x) = B(x) + O(x^{n+1})$ quand $x \to 0$. Quel est le développement limité de $\frac{f}{g}$ à l'ordre $n$ quand $x \to 0$ ?

***Exercice 9.*** — Pour $m, n \geqslant 1$ deux entiers, déterminer le pgcd de $X^m - 1$ et $X^n - 1 \in k[X]$.

***Exercice 10* (Polynômes de Tchebycheff).** — Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que l'on ait :

$$\forall \theta \in \mathbf{R},\ \cos(n\theta) = T_n(\cos\theta).$$

***Exercice 11.*** — On note $\mathcal{S} := \{P \in \mathbf{R}[X],\ \forall x \in \mathbf{R},\ P(x) \geqslant 0\}$ et $\mathcal{C} := \{A^2 + B^2,\ A, B \in \mathbf{R}[X]\}$.

**a)** Montrer que $\mathcal{C}$ est stable par multiplication.

**b)** Montrer que $\mathcal{C} = \mathcal{S}$.
[**Indication:** Commencer par étudier le cas des polynômes de degré 2.]

**c)** Soit $P = X^2Y^2(X^2 + Y^2 - 3) + 1 \in \mathbf{R}[X,Y]$.
Peut-on écrire $P$ comme somme de carrés d'éléments de $\mathbf{R}[X,Y]$ ?

## II. Polynômes irréductibles

***Exercice 12.*** — Soit $P \in \mathbf{Q}[X]$ un polynôme irréductible. Montrer que $P$ est à racines simples.
Généraliser à un polynôme $P \in \mathbf{F}_p[X]$ irréductible.

***Exercice 13.*** — **a)** Quels sont les éléments irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ ? de $\mathbf{R}[X]$ ?

**b)** Donner un exemple de $P \in \mathbf{Z}[X]$ qui est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$ mais pas dans $\mathbf{Z}[X]$.

**c)** Donner un exemple de $P \in \mathbf{Z}[X]$ qui est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$ mais pas dans $\mathbf{Q}[X]$.

**d)** Donner un exemple de $P \in \mathbf{Q}[X]$ réductible, mais sans racine dans $\mathbf{Q}$.

***Exercice 14.*** — Soit $P \in \mathbf{Z}[X]$ un polynôme unitaire de degré $d$.

**a)** Montrer que s'il existe une infinité d'entiers $x_i \in \mathbf{Z}$ tels que $|P(x_i)|$ est premier ou égal à 1, alors $P$ est irréductible.

**b)** Montrer que $2d+1$ entiers $x_i$ comme précédemment suffisent pour montrer que $P$ est irréductible.

***Exercice 15.*** — Étudier l'irréductibilité des polynômes de $\mathbf{Z}[X]$ ci-dessous :

**a)** $X^n - p$ $(p \in \mathcal{P})$ **b)** $X^{p-1} + \cdots + X + 1$ $(p \in \mathcal{P})$ **c)** $X^{19} + 6X^{17} - 3X^5 + 75$

**d)** $X^3 - X^2 - X - 1$ **e)** $5X^3 + 3X^2 - 4X - 27$ **f)** $X^3 - 6X^2 - 4X - 13$

*Exercice 16.* — Etudier l'irréductibilité des polynômes de $k[X,Y]$ ci-dessous :

**a)** $Y - X^2$ **b)** $X^2 + Y^2 + 1$ **c)** $X^2 + Y^2 - 1$

**d)** $X^2 - Y^2 - 1$ **e)** $Y^2 - X^3$ **f)** $X^3 - Y^2 - X$

**g)** $XY^3 - X^2Y - Y^2 + X$ **h)** $X^n + Y^n - 1$ **i)** $X^n + (Y+5)X + (Y-1) \in \mathbf{Q}[X,Y]$ (Réduire dans $\mathbf{Q}[X,Y]/(Y+1)$.)

## III. Polynômes à plusieurs indéterminées

*Exercice 17.* — Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction telle que $\forall x, y \in \mathbf{R}$, les fonctions $f_x : y \mapsto f(x,y)$ et $f_y : x \mapsto f(x,y)$ sont polynomiales. Le but est de montrer que $f$ est une fonction polynomiale.

**a)** Commencer en supposant qu'il existe $N > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f_x$ est de degré $\leqslant N$.

**b)** Montrer qu'il existe un $N > 0$ tel que l'ensemble $\{x \in \mathbf{R},\ \deg(f_x) \leqslant N\}$ soit non dénombrable.

**c)** Conclure.

*Exercice 18.* — Soit $k$ un corps infini et $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme.

**a)** L'ensemble $V(P) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in k^n,\ P(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$ est-il fini ?

**b)** Montrer que si $V(P) = k^n$, alors $P = 0$.

**c)** Si $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, montrer que pour $P \neq 0$, $V(P)$ est d'intérieur vide.

*Exercice 19.* — Soit $k$ un corps infini et $P, Q \in k[X,Y]$ premiers entre eux.

**a)** Montrer qu'il existe $A, B \in k[X,Y]$ et $D \in k[X] - \{0\}$, tels que l'on ait $D = AP + BQ$.
[**Indication:** Travailler dans $k(X)[Y]$.]

**b)** En déduire que l'ensemble $\{(x,y) \in k^2,\ P(x,y) = 0 \text{ et } Q(x,y) = 0\}$ est fini.

## IV. Polynômes symétriques

*Exercice 20.* — Exprimer les polynômes symétriques suivants en fonction des polynômes symétriques élémentaires :

**a)** $X^3 + Y^3 + Z^3$ **b)** $X^2Y + XY^2 + X^2Z + XZ^2 + Y^2Z + YZ^2$

**c)** $X^2YZ + XY^2Z + XYZ^2$ **d)** $X^4 + Y^4$

*Exercice 21.* — Pour $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 0$, montrer que l'ensemble des polynômes symétriques homogènes de degré (total) $k$ est un espace vectoriel de dimension finie.
Pour $n = 3, k = 5$, quelle est sa dimension ?

*Exercice 22.* — **a)** Soient $\alpha, \beta, \gamma$ les trois racines complexes du polynôme $P = X^3 + 2X^2 - 2X + 5$. Trouver un polynôme de $\mathbf{Z}[X]$ dont les racines sont $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3$.

**b)** Soient $\alpha, \beta, \gamma$ les trois racines complexes du polynôme $X^3 + 2X^2 + X + 7$. Trouver un polynôme de $\mathbf{Z}[X]$ dont les racines sont $\alpha + \beta$, $\alpha + \gamma$ et $\beta + \gamma$.

*Exercice 23.* — **[Retour sur les éléments algébriques]**
Soient $x, y \in \mathbf{C}$ deux nombres algébriques sur $\mathbf{Q}$ : il existe deux polynômes unitaires non nuls $P, Q \in \mathbf{Q}[X]$ tels que l'on ait $P(x) = 0$ et $Q(y) = 0$. On note $n = \deg P$ et $m = \deg Q$.
Soient $x_1 = x, x_2, \ldots, x_n$ les racines complexes de $P$ ; $y_1 = y, \ldots, y_m$ les racines complexes de $Q$ et soit $S$ le polynôme

$$S := \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} (T - x_i - y_j) \in \mathbf{C}[T].$$

**a)** Montrer que $S$ est en fait dans $\mathbf{Q}[T]$ (et que $x + y$ est algébrique).
[**Indication:** Si $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ sont des indéterminées, remarquer que le polynôme $\prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} (T - X_i - X_j) \in \mathbf{Z}[X_i, Y_j][T]$ est invariant sous l'action de $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{S}_m$.]

**b)** De même, montrer que $xy$ est algébrique.

**c)** Montrer que si $x, y$ sont supposés entiers algébriques (c'est-à-dire $P, Q \in \mathbf{Z}[X]$), alors $x + y$ et $xy$ aussi.

*Exercice 24.* — **[Polynômes de Newton]**
Soient $n \geqslant 1, k \geqslant 0$ des entiers. On note $N_k := \sum_{i=1}^n X_i^k$ le $k$ème polynôme symétrique de Newton et $\sigma_k$ le $k$ème polynôme symétrique élémentaire en des indéterminées $X_1, \ldots, X_n$. On pose $\mathcal{A} := \mathbf{Z}[X_i]((T))$ le corps des séries formelles.

**a)** Montrer que dans $\mathcal{A}$, $\sum_{k \geqslant 0} N_k T^k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - X_i T}$.

**b)** Soit $P = \prod_{i=1}^{n} (T - X_i)$. Montrer que la quantité précédente vaut également $\frac{P'(\frac{1}{T})}{TP(\frac{1}{T})}$.

**c)** En déduire les relations de Newton :

$$N_k - N_{k-1}\sigma_1 + \cdots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}N_1 + (-1)^k k\sigma_k = 0, \quad \text{si } k \leqslant n$$
$$N_k - N_{k-1}\sigma_1 + \cdots + (-1)^n \sigma_n N_{k-n} \quad \text{si } k > n$$

**d)** Montrer que tout polynôme symétrique de $\mathbf{Q}[X_1, \ldots, X_n]$ s'exprime (de manière unique) comme un polynôme en les $(N_i)_{i=0,\ldots n}$. Est-ce encore vrai dans $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ ?