Examen du 6 juin 2012

3 heures

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la concision de la rédaction.
L'utilisation de calculatrices et de téléphones portables est interdite.

Le sujet est constitué de trois exercices proches du cours et de deux problèmes indépendants. Au sein d'un exercice, certaines questions utilisent les précédentes, mais de nombreuses sont indépendantes entre elles. Le candidat peut admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes **s'il le précise explicitement**.

* *
*

I. Exercices proches du cours

Les trois questions sont indépendantes

1. — On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

a) Déterminer le rang et la trace de f.

b) En déduire sans calcul le polynôme caractéristique de f.

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

d) Déterminer le polynôme minimal de f.

2. — Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$AB - BA = A.$$

a) Montrer que, pour tout entier naturel k, on a : $A^kB - BA^k = kA^k$.

b) On considère l'application f, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même, définie par $f(M) = MB - BM$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c) En déduire que A est nilpotente.

[**Indication:** Raisonner par l'absurde et considérer les vecteurs propres de f.]

3. — Soit f un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E tel que tout vecteur non nul de E est vecteur propre de f. On veut montrer qu'alors f est une homothétie (i.e. $\exists\,\lambda \in K, \forall\, x \in E, f(x) = \lambda x$).

Soient x et x' deux vecteurs non nuls de E. Il existe donc λ et λ' dans K tels que $f(x) = \lambda x$ et $f(x') = \lambda' x'$.

a) On suppose que x et x' sont colinéaires. Montrer que $\lambda = \lambda'$.

b) On suppose maintenant que x et x' sont linéairement indépendants. En considérant le vecteur $x - x'$, montrer que $\lambda = \lambda'$.

c) Conclure.

* *
*

II. Problème : exponentielle d'une matrice à paramètre

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de base $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ et soit f l'endomorphisme de E admettant la matrice A suivante dans la base $\mathcal{E}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

avec $m \in \mathbb{R}$.

1. — Déterminer le polynôme caractéristique de f et vérifier qu'il ne dépend pas de m.

2. — On distinguera dans la suite les deux cas $m = 0$ et $m \neq 0$ lorsque c'est nécessaire.

a) Déterminer les sous-espaces propres de f.

b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

c) Déterminer le polynôme minimal de f.

d) Déterminer les sous-espaces caractéristiques de f.

e) Donner une base $\mathcal{F}$ de E dans laquelle la matrice de f soit une des formes réduites de Dunford suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{F}$.

3. — Soit B la matrice de f dans la base $\mathcal{F}$. On rappelle que si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k.$$

a) Calculer $\exp(B)$.

b) Sans calculs, donner l'expression de $\exp(A)$ en fonction de $\exp(B)$ et de la matrice P.

* *
*

III. Problème : résultant de deux polynômes

Pour tout entier $k > 0$, on note $\mathbb{C}[X]_{<k}$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes *de degré* $< k$.

1. — Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[X]_{<k}$? En donner une base.

On fixe pour la suite du problème deux entiers $m > 0$ et $n > 0$ et l'on note

$$E := \mathbb{C}[X]_{<m} \times \mathbb{C}[X]_{<n}$$

l'espace vectoriel produit. Les éléments de E sont par définition les couples de polynômes (P_1, P_2) tels que $\deg P_1 < m$ et $\deg P_2 < n$. E est un espace vectoriel : le vecteur nul est le couple $(0,0)$ et l'addition et la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ sont définies par :

$$\begin{aligned}&(P_1, P_2) + (Q_1, Q_2) := (P_1 + Q_1, P_2 + Q_2)\\ &\lambda \cdot (P_1, P_2) := (\lambda \cdot P_1, \lambda \cdot P_2).\end{aligned}$$

2. — Montrer que la famille formée des couples de polynômes suivants :

$$\Big\{(1,0), (X,0), \ldots, (X^{m-1}, 0), (0,1), (0,X), \ldots, (0, X^{n-1})\Big\}$$

est une base de E. Quelle est la dimension de E ?

Soient $A = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré exactement n ($a_n \neq 0$) et $B = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \cdots + b_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré exactement m ($b_m \neq 0$).

3. — Pour tout couple de polynômes $(U_1, U_2) \in E$, on pose

$$\Phi_{A,B}(U_1, U_2) := AU_1 + BU_2.$$

a) Montrer que $\Phi_{A,B}(U_1, U_2)$ appartient à $\mathbb{C}[X]_{<n+m}$.

b) Vérifier que l'application $\Phi_{A,B} : E \to \mathbb{C}[X]_{<n+m}$ ainsi définie est linéaire.

4. — A et B désignent toujours les polynômes précédents.

a) Montrer que si A et B ne sont pas premiers entre eux alors $\Phi_{A,B}$ n'est pas injective.

b) Réciproquement, montrer que si A et B sont premiers entre eux, alors $\Phi_{A,B}$ est injective. [**Indication:** On rappelle le lemme de Gauss : si A et B sont deux polynômes premiers entre eux et si A divise le produit BC alors A divise C.]

c) Montrer que A et B sont premiers entre eux si et seulement si $\Phi_{A,B}$ est bijective.

d) Retrouver grâce à ce qui précède que les polynômes A et B sont premiers entre eux si et seulement s'il existe des polynômes C et D tels que $AC + BD = 1$.

5. — Dans cette question, on suppose $n = 3$ et $m = 2$.

a) Ecrire la matrice de l'application $\Phi_{A,B}$ dans la base $\Big\{(1,0), (X,0), (0,1), (0,X), (0,X^2)\Big\}$ de E et la base $(1, X, X^2, X^3, X^4)$ de $\mathbb{C}[X]_{<5}$.

b) Montrer que A et B sont premiers entre eux si et seulement si

$$\text{dét} \begin{bmatrix} a_0 & 0 & b_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & b_1 & b_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 & b_0 \\ a_3 & a_2 & 0 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Fin du sujet