Nombres algébriques

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés des nombres algébriques. Un nombre réel x est dit *algébrique* s'il existe un polynôme non nul P à *coefficients rationnels* (*i.e.* $P \in \mathbf{Q}[X]$) tel que $P(x) = 0$. Un réel x qui n'est pas algébrique est dit *transcendant*.

1. Montrer que les nombres réels $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sont des nombres algébriques.

2. Soit x un nombre réel. Montrer que x est algébrique si et seulement s'il existe un entier positif $n \geqslant 1$ tel que la famille de nombres réels $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ est liée dans le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$.

3. Pour tout réel x, on note $\mathbf{Q}[x] := \{R(x), R \in \mathbf{Q}[X]\}$ l'ensemble des valeurs que peut prendre un polynôme à coefficients rationnels lorsqu'on l'évalue en x. (Par définition, $\mathbf{Q}[x]$ est un sous-ensemble de $\mathbf{R}$.)

- **3.1** Montrer que $\mathbf{Q}[x]$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel.
- **3.2** Montrer que si x est algébrique alors le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}[x]$ est de dimension finie.
  [**Indication:** Considérer la division euclidienne dans $\mathbf{Q}[x]$ par un polynôme P tel que $P(x) = 0$.]
- **3.3** Réciproquement, montrer que si $\mathbf{Q}[x]$ est de dimension finie alors le réel x est algébrique.

4. Soit $x \in \mathbf{R}$ un nombre algébrique et soit $\Pi \in \mathbf{Q}[X]$ un polynôme de degré minimal parmi les polynômes non nuls tels que $\Pi(x) = 0$.

- **4.1** Montrer que le polynôme Π est irréductible, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de factorisation $\Pi = R \cdot S$ avec R et S des polynômes de $\mathbf{Q}[X]$ de degré $\geqslant 1$.
- **4.2** Soit $P \in \mathbf{Q}[X]$ un polynôme tel que $P(x) = 0$. En faisant la division euclidienne de P par Π, montrer que Π divise P.
- **4.3** Soit $P \in \mathbf{Q}[X]$ un polynôme tel que $P(x) \neq 0$. Montrer que les polynômes P et Π sont premiers entre eux. En déduire qu'il existe des polynômes A et B de $\mathbf{Q}[X]$ tels que
  $$A\Pi + BP = 1,$$
  puis que l'on a $\frac{1}{P(x)} \in \mathbf{Q}[x]$.
- **4.4** Montrer que $\mathbf{Q}[x]$ est un corps. Un tel corps est souvent qualifié de *corps de nombres.*

5. Soient x et y deux nombres algébriques non nuls. On se propose de montrer que $x+y$ et xy sont encore des nombres algébriques[1]. On pose pour cela $\mathbf{Q}[x, y] := \{R(x, y), R \in Q[X, Y]\}$.

- **5.1** Montrer qu'il existe des entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ tels que $\{1, x, x^2, \ldots, x^m\}$ engendre $\mathbf{Q}[x]$ et $\{1, y, y^2, \ldots, y^n\}$ engendre $\mathbf{Q}[y]$.
- **5.2** Montrer que la famille $\{x^i y^j\}_{0 \leqslant i \leqslant m,\ 0 \leqslant j \leqslant n}$ engendre $\mathbf{Q}[x, y]$.
- **5.3** En déduire que $\mathbf{Q}[x, y]$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension finie.
- **5.4** Montrer que $\mathbf{Q}[x + y] \subset \mathbf{Q}[x, y]$ et $\mathbf{Q}[xy] \subset \mathbf{Q}[x, y]$ et conclure.

---

[1] Le lecteur est invité à se rendre compte que la méthode naïve qu'il a employée à la question 1 se généralise mal. Défi : trouver un polynôme annulant $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$.