# Partiel du 4 avril 2011

*3 heures*

*La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la concision de la rédaction.*
*L'utilisation de calculatrices et de téléphones portables est interdite.*

Le sujet est constitué de quelques questions proches du cours et de deux problèmes indépendants. Au sein d'un problème, certaines questions utilisent les précédentes, mais de nombreuses sont indépendantes entre elles. Le candidat peut admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes **s'il le précise explicitement**.
Dans tout le sujet, $K$ désigne un corps commutatif.

* *
*

## I. Questions proches du cours

***1***. — Soit $E$ un $K$–espace vectoriel et $u$ un endomorphisme de $E$. On suppose que pour tout vecteur $x \in E$, la famille $\{x, u(x)\}$ est liée. En démontrant votre réponse, préciser la nature de $u$.

***2***. — **Vrai ou faux ?** Soient $E$ un $K$–espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de $E$ et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une famille de vecteurs de $E$. En justifiant votre réponse, dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux.

**a)** Si la famille $\{u(e_1), \ldots, u(e_n)\}$ est libre, alors $u$ est injective.
**b)** Si la famille $\{e_1, \ldots, e_n\}$ engendre $E$, alors $\{u(e_1), \ldots, u(e_n)\}$ engendre $E$.
**c)** Les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont en somme directe.
**d)** On a l'inégalité $\dim(\operatorname{Vect}\{u(e_1), \ldots, u(e_n)\}) \leqslant \operatorname{rg}(u)$.
**e)** $\{P \in K[X],\ P(X^2) = P' + X^4 P\}$ est un sous-espace vectoriel de $K[X]$.

* *
*

## II. Problème : endomorphismes $u$ tels que $u^3 = u^2$

Soit $E$ un $K$–espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. On note $\mathcal{N}_2(E)$, $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{S}(E)$ les sous-ensembles d'endomorphismes de $E$ suivants :

$$\mathcal{N}_2(E) = \{v \in \mathcal{L}(E),\ v^2 = 0\}$$
$$\mathcal{P}(E) = \{p \in \mathcal{L}(E),\ p^2 = p\}$$
$$\mathcal{S}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E),\ u^3 = u^2\}.$$

**N.B. :** Les questions **2.**, **3.** et **4.** sont indépendantes entre elles.

***1***. — Montrer les inclusions $\mathcal{N}_2(E) \subset \mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{S}(E)$.

*2.* — Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini par :

$$\forall\,(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ f(x,y,z) = (0,x,z)$$

Montrer que $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3)$ et déterminer (rapidement) $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
Montrer que les inclusions de la question **1.** sont en général strictes.

*3.* — Soit $v \in \mathcal{N}_2(E)$ un endomorphisme non nul.

**a)** Justifier l'existence d'une famille $\{e_1, \ldots, e_r\}$ de $E$ telle que $\{v(e_1), \ldots, v(e_r)\}$ soit une base de $\operatorname{Im} v$. Montrer que $\{e_1, \ldots, e_r\}$ est libre et que

$$E = \operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Vect}\{e_1, \ldots, e_r\}.$$

**b)** Montrer l'inclusion $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} v$.

**c)** Soit $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(K)$. Montrer l'existence d'une base $\underline{e'} = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ de $E$ dans laquelle la matrice de $v$ est de la forme :

$$\operatorname{Mat}_{\underline{e'}} v = \begin{bmatrix} N & & & \\ & \ddots & & \\ & & N & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

(c'est-à-dire $r$ blocs égaux à $N$ sur la diagonale et des zéros partout ailleurs).

*4.* — Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

**a)** Montrer que si $\operatorname{Ker} u = \{0\}$ alors $u = \mathrm{id}$.

**b)** Montrer l'inclusion $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2$. Montrer que l'on a l'égalité $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$ si et seulement si $u \in \mathcal{P}(E)$.

**c)** Montrer que $u^2 \in \mathcal{P}(E)$ et en déduire que

$$E = \operatorname{Im} u^2 \oplus \operatorname{Ker} u^2.$$

**d)** Montrer que les sous-espaces $\operatorname{Im} u^2$ et $\operatorname{Ker} u^2$ sont stables par $u$.

**e)** Soit $v$ la restriction de $u$ à $\operatorname{Ker} u^2$. Montrer que $v \in \mathcal{N}_2(\operatorname{Ker} u^2)$.

**f)** Déterminer la restriction de $u$ à $\operatorname{Im} u^2$.

***5.*** — Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice telle que $A^3 = A^2$. Montrer qu'il existe une matrice inversible $Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ telle que la matrice $Q^{-1}AQ$ soit de la forme :

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & N & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & N & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

* *
*

### III. Problème : Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de rang majoré

Soit $n \geqslant 1$ un entier. On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients *réels*. Le but de ce problème est de démontrer le résultat suivant :

***Théorème***. — *Soit $p$ un entier $0 \leqslant p \leqslant n$. Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant :*

$$(\star) \qquad \forall\, M \in \mathcal{V},\ \operatorname{rg}(M) \leqslant p.$$

*Alors on a* $\dim \mathcal{V} \leqslant np$.

**N.B. :** Les questions **1.**, **2.**, **3.** et **4.** sont indépendantes entre elles.

***1***. — Montrer le théorème si $p = 0$ ou si $p = n$.

**Dans toute la suite, on suppose $p \neq 0$ et $p \neq n$.**

***2***. — Soit $B \in \mathcal{M}_{p,\,n-p}(\mathbf{R})$ une matrice telle que ${}^tBB = 0$. Montrer que $B = 0$.

On note $\mathrm{Id}_p$ la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$. Soit alors $J \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice par blocs

$$J := \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

***3***. — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice de la forme

$$M = \begin{bmatrix} 0 & B \\ \mathrm{A} & \mathrm{C} \end{bmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_{n-p,\,p}(\mathbf{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,\,n-p}(\mathbf{R})$ et $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbf{R})$. Les coefficients de $A$ (resp. de $B$, resp. de $C$) sont notés $a_{i,j}$ (resp. $b_{i,j}$, resp. $c_{i,j}$).

On suppose que pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$\operatorname{rg}(M + \lambda J) \leqslant p.$$

**a)** Montrer que, pour tout réel $\lambda \neq 0$ et pour tous indices $i, j \in [1, n-p]$

$$\operatorname{rg} \begin{bmatrix} \lambda & & & & b_{1,j} \\ & \lambda & & & b_{2,j} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \lambda & b_{p,j} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,p} & c_{i,j} \end{bmatrix} = p,$$

puis que $\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j} = \lambda c_{i,j}$.

[**Indication:** On pourra remarquer que la matrice ci-dessus est une matrice extraite de ...]

**b)** En déduire que $C = 0$ et que $AB = 0$.

***4***. — Soit $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{bmatrix} 0 & B \\ {}^tB & C \end{bmatrix}$ où $B \in \mathcal{M}_{p,\,n-p}(\mathbf{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbf{R})$ sont des blocs quelconques. (${}^tB \in \mathcal{M}_{n-p,\,p}(\mathbf{R})$ désigne la transposée de $B$.) Justifier brièvement que $\mathcal{X}$ est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

***5***. — Le but de cette question est de démontrer le théorème pour un espace $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ satisfaisant à $(\star)$ et contenant $J$.

**a)** En utilisant les questions **2.** et **3.**, montrer que $\mathcal{V}_0$ et $\mathcal{X}$ sont en somme directe.
**b)** En déduire que $\dim \mathcal{V}_0 \leqslant np$.

***6***. — Démontrer le théorème pour un espace $\mathcal{V}$ général (c'est-à-dire lorsque l'on ne suppose plus $J \in \mathcal{V}$).
[**Indication:** Si $\mathcal{V}$ vérifie $(\star)$, on pourra considérer l'ensemble $\mathcal{V}_0 := \{PMQ, M \in \mathcal{V}\}$ pour des matrices $P$ et $Q$ bien choisies.]

***7***. — Montrer que l'inégalité du théorème est optimale, c'est-à-dire qu'il existe au moins un sous-espace $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $(\star)$ et de dimension exactement $np$.