Examen du 27 mars 2012

3 heures

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la concision de la rédaction.
L'utilisation de calculatrices et de téléphones portables est interdite.

Le sujet est constitué de quelques questions proches du cours et de deux exercices indépendants. Au sein d'un exercice, certaines questions utilisent les précédentes, mais de nombreuses sont indépendantes entre elles. Le candidat peut admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes **s'il le précise explicitement**.

* *
*

I. Questions proches du cours

Les deux questions sont indépendantes

1. — Montrer que l'image d'une famille libre par une application linéaire injective est encore une famille libre.

2. — Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et soient f et g deux endomorphismes de E tels que :

$$f \circ g \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = g.$$

a) Montrer que pour tout $v \in E$, on a : $v - (g \circ f)(v) \in \operatorname{Ker} f$.
En déduire que

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g.$$

b) Comparer le rang de f et le rang de g.

* *
*

II. Exercice : endomorphismes f tels que $f \circ f = -\operatorname{id}$

Soit E un espace vectoriel *réel* de dimension finie $n \geqslant 1$. On suppose qu'il existe une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f \circ f = -\operatorname{id}_E$.

1. — Soit $x \in E$ non nul. On note E_x le sous-espace vectoriel de E engendré par x et $f(x)$.

a) Montrer que $\dim E_x = 2$.

b) Montrer l'inclusion $f(E_x) \subset E_x$.

2. — Montrer que s'il existe $y \in E$ tel que $y \notin E_x$, alors on a :

$$E_x \cap E_y = \{0\} \quad \text{et} \quad f(E_x \oplus E_y) \subset E_x \oplus E_y.$$

3. — Montrer que s'il existe de plus $z \in E$ tel que $z \notin E_x \oplus E_y$, alors on a :

$$(E_x \oplus E_y) \cap E_z = \{0\} \quad \text{et} \quad f(E_x \oplus E_y \oplus E_z) \subset E_x \oplus E_y \oplus E_z.$$

4. — Construire une famille de vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ de E tels que :
$$E = E_{x_1} \oplus \cdots \oplus E_{x_p}.$$

5. — En déduire que s'il existe dans E une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f \circ f = -\operatorname{id}_E$, alors :

a) l'entier $n = \dim E$ est pair ;

b) il existe une base de E telle que la matrice de f dans cette base soit de la forme :
$$\begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$$
où I_p est la matrice identité $p \times p$.

6. — Réciproquement, montrer que tout espace vectoriel de dimension paire admet un endomorphisme g vérifiant $g \circ g = -\operatorname{id}$.

7. — On considère le sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{L}(E)$ engendré par f et id_E. Vérifier que $\mathcal{F}$ est stable pour la loi $\circ$ de composition des endomorphismes, puis montrer que $(\mathcal{F}, +, \circ)$ est isomorphe au corps des nombres complexes $(\mathbf{C}, +, \times)$.

* *
*

III. Exercice : intersections d'hyperplans

Soit E un k–espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. On appelle hyperplan de E un sous-espace vectoriel $H \subset E$ de dimension $\dim H = \dim E - 1$. Pour simplifier les notations, on note $\mathcal{L}$ l'espace $\mathcal{L}(E, k)$ des applications linéaires de E dans k.

1. — Soit $\varphi : E \to k$ un élément *non nul* de $\mathcal{L}$. Montrer que $\ker \varphi$ est un hyperplan de E.

2. — Réciproquement, soit H un hyperplan de E.

a) Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que :
$$\forall\, i \in [1, n-1], \quad e_i \in H.$$

b) Montrer qu'il existe une fonction *non nulle* $\varphi \in \mathcal{L}$ telle que $H = \ker \varphi$.

3. — Soient φ et ψ deux fonctions non nulles de $\mathcal{L}$. Montrer que l'on a $\ker \varphi = \ker \psi$ si et seulement s'il existe un scalaire $\lambda \neq 0$ tel que $\varphi = \lambda \psi$.
[**Indication:** Utiliser la question *2–a*).]

4. — Soient F un sous-espace vectoriel de E et H un hyperplan de E.

a) Montrer que si $F \not\subset H$ alors $F + H = E$.

b) En distinguant selon que $F \subset H$ ou non, déterminer $\dim F \cap H$ en fonction de $\dim F$. En déduire que l'on a dans tous les cas $\dim F \cap H \geqslant \dim F - 1$.

5. — Soient $\ell \geqslant 1$ un entier et $H_1, \ldots, H_\ell$ des hyperplans de E. Montrer l'inégalité :
$$\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_\ell) \geqslant n - \ell.$$
Si les hyperplans $H_1, \ldots, H_\ell$ sont deux à eux distincts a-t-on nécessairement égalité dans l'inégalité précédente ?

6. — Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim F = d$.

a) Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que :

$$\forall\, i \in [1, d], \quad e_i \in F.$$

b) Pour tout entier $r \in [1, n]$, soit H_r l'hyperplan :

$$H_r := \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{r-1}, e_{r+1}, \ldots, e_n).$$

Montrer que l'on a $F = H_{d+1} \cap \cdots \cap H_n$.

c) F peut-il s'exprimer comme une intersection de moins que $n - d$ hyperplans ?

Dans la suite de l'exercice on suppose $E = k^n$. On identifie éléments de k^n et vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(k)$.

7. — Soit $\varphi : k^n \to k$ dans $\mathcal{L}$. Montrer qu'il existe des uniques scalaires $a_1, \ldots, a_n \in k$ tels que

$$\forall\, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in k^n, \varphi(X) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n.$$

8. — Soient $C_1, \ldots, C_d$ une famille libre de vecteurs colonnes et l'on pose $F = \mathrm{Vect}\{C_1, \ldots, C_d\}$. Soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ un vecteur colonne. On note M_X la matrice $n \times (d+1)$ suivante :

$$M_X := \Big[C_1 \,|\ldots|\, C_d \,| X \Big]$$

a) Montrer que $X \in F$ si et seulement si M_X est de rang d.

b) Montrer qu'il existe des fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{L}$ telles que pour tout vecteur colonne X la matrice M_X soit équivalente à la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \varphi_1(X) \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \varphi_d(X) \\ & & & \vdots \\ & & & \varphi_n(X) \end{bmatrix}$$

et donner un algorithme pour les obtenir.

c) Montrer que $F = (\ker \varphi_{d+1}) \cap \cdots \cap (\ker \varphi_n)$.

9. — Soit $a \in k$ un paramètre et soient C_1 et C_2 les vecteurs colonne suivants :

$$C_1 := \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ a^2 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad C_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a \end{bmatrix}.$$

En discutant selon les valeurs de a, écrire $\mathrm{Vect}(C_1, C_2)$ comme une intersection d'hyperplans.

Fin du sujet