Quelques suites récurrentes

Soit $r \geqslant 1$ un entier, $a_0 \in \mathbf{R}^*$ et $a_1 \in \mathbf{R}$ des nombres réels fixés. On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des suites linéaires récurrentes suivantes :

$$\mathcal{L} := \{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}},\ \forall\, n \in \mathbf{N} \quad u_{n+2} = a_1 u_{n+1} + a_0 u_n\}.$$

Soit enfin d un entier positif. Le but de ce problème est d'étudier l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites u pour lesquelles il existe un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]_{\leqslant d}$ tel que :

$$(\star) \qquad \forall\, n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+2} = a_1 u_{n+1} + a_0 u_n + P(n).$$

1. Vérifier que $\mathcal{S}$ est un $\mathbf{R}$ espace vectoriel et que $\mathcal{L}$ en est un sous-espace vectoriel. Rappeler rapidement pouquoi $\mathcal{L}$ est de dimension finie ainsi que sa dimension.

2. Soit $\varphi : \mathbf{R}[X]_{\leqslant d} \to \mathbf{R}^{d+1}$ l'application linéaire définie par :

$$\varphi(P) = (P(0), P(1), \ldots, P(d))$$

2.1 Montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2.2 Soit $u \in \mathcal{S}$. Par définition, il existe $P \in \mathbf{R}[X]_{\leqslant d}$ tel que $(\star)$ soit vérifiée. Montrer qu'un tel polynôme P est unique. Dans la suite, on notera ce polynôme P_u.

3. Soit $\theta : \mathcal{S} \to \mathbf{R}[X]_{\leqslant d}$ l'application définie par $\theta(u) = P_u$.

3.1 Vérifier que θ est linéaire.

3.2 Identifier le noyau de θ.

3.3 Montrer que θ est surjective.

3.4 En déduire la dimension de $\mathcal{S}$.

Dans la suite du problème, pour i un entier positif, on définit les polynômes $Q^{(i)}$ et des suites $v^{(i)}$ définies par [1] :

$$Q^{(i)} := (X+2)^i - a_1(X+1)^i - a_0 X^i \qquad \text{et} \qquad v_n^{(i)} := n^i.$$

4. Pour $k \geqslant 0$, montrer que la famille $\{v^{(0)}, v^{(1)}, \ldots, v^{(k)}\}$ est libre.

5. Dans cette question, on suppose $a_0 + a_1 \neq 1$.

5.1 Montrer que les suites $v^{(0)}, v^{(1)}, \ldots, v^{(d)}$ sont dans $\mathcal{S}$.

5.2 Montrer que l'espace $\operatorname{Vect}(v^{(0)}, v^{(1)}, \ldots, v^{(d)})$ est supplémentaire de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{S}$.

6. Dans cette question, on suppose $a_0 + a_1 = 1$.

6.1 Que vaut alors le polynôme $Q^{(0)}$? Vérifier que $v^{(0)} \in \mathcal{L}$.

6.2 Montrer que $v^{(d+1)}$ est dans $\mathcal{S}$.

6.3 Montrer qu'il existe une valeur α de a_1 telle que $v^{(d+2)}$ soit dans $\mathcal{S}$. Que vaut $Q^{(1)}$ lorsque $a_1 = \alpha$? Vérifier qu'alors $v^{(1)} \in \mathcal{L}$.

6.4 Montrer que si $a_1 \neq \alpha$, alors $\mathcal{S} = \mathcal{L} \oplus \operatorname{Vect}(v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(d+1)})$.

6.5 Montrer que si $a_1 = \alpha$, alors $\mathcal{S} = \mathcal{L} \oplus \operatorname{Vect}(v^{(2)}, v^{(3)}, \ldots, v^{(d+2)})$.

7. Application numérique : Soient w et z deux suites récurrentes telles que :

$$w_{n+2} = 5w_{n+1} - 6w_n + 2n + 1$$
$$z_{n+2} = z_n + 4n + 2$$

Trouver des solutions particulières, puis déterminer l'ensemble des suites w et z possibles.

---

1. La convention est de prendre $\alpha^0 = 1$ quel que soit le polynôme (ou le réel) α.