

Examen du 23 septembre 2012

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la concision de la rédaction.
L'utilisation de calculatrices et de téléphones portables est interdite.

* *
*

Exercice 1. — On considère le nombre complexe $a := e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

- 1) On note I, A, B, C, D les points du plan complexe d'affixes respectives $1, a, a^2, a^3, a^4$.
Vérifier que $a^5 = 1$ et montrer que :

$$IA = AB = BC = CD = DI.$$

- 2) Vérifier que pour tout nombre complexe z

$$z^5 - 1 = (z - 1)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4)$$

et en déduire que $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = 0$.

- 3) Montrer que $a^3 = \bar{a}^2$ et que $a^4 = \bar{a}$.

En déduire que

$$(a + \bar{a})^2 + (a + \bar{a}) - 1 = 0.$$

- 4) Résoudre l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.

En déduire la valeur exacte de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

* *
*

Exercice 2. — Gemma et Rémi jouent avec des jetons verts et rouges. Ils décident que chaque jeton vert vaut 7 euros et chaque jeton rouge 11 euros.

- 1) Rémi affirme : « Nous pouvons faire n'importe quelle transaction en nombre entier d'euros entre nous. »

Pourquoi a-t-il raison ?

- 2) Gemma affirme : « Je suis certaine de pouvoir te régler toute somme entière supérieure ou égale à 77 euros sans que tu n'aies de monnaie à me rendre. »

Le but de la question est de savoir si elle a raison.

Soit N un entier naturel.

- a) En remarquant que $(-3; 2)$ est une solution particulière de l'équation $7u + 11v = 1$, donner une solution particulière de l'équation $7x + 11y = N$, où x et y sont des entiers relatifs.

- b) Vérifier alors que

$$7x + 11y = N \iff 7(x + 3N) = 11(-y + 2N).$$

- c) En déduire que $7x + 11y = N$ si et seulement s'il existe un entier $k \in \mathbf{Z}$ tel

$$\text{que } \begin{cases} x = 11k - 3N \\ y = 2N - 7k \end{cases}.$$

- d) Gemma doit N euros à Rémi. Déduire des questions précédentes qu'elle peut régler sa dette sans que Rémi n'ait à lui rendre de monnaie à condition que l'intervalle $[\frac{3N}{11}; \frac{2N}{7}]$ contienne un entier.

- e) Conclure.