

Contrôle du 20 avril 2012

30 minutes

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la concision de la rédaction.

L'utilisation de calculatrices et de téléphones portables est interdite.

Les deux exercices sont indépendants.

* *
*

1. — Soit E le sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^4 engendré par les vecteurs v_1 et v_2 suivants :

$$v_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Déterminer un système d'équations définissant E .

* *
*

2. — On considère le système d'équations suivant en les inconnues $\{x, y, z\}$ et en des paramètres $\{b_1, b_2, b_3\}$ entiers :

$$\begin{cases} 2x - y + z = b_1 \\ -2x + 4y + 2z = b_2 \\ -2x + 7y + 5z = b_3 \end{cases}$$

a) A quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) sur (b_1, b_2, b_3) le système admet-il au moins une solution (x, y, z) entière ?

b) A quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) sur (b_1, b_2, b_3) le système admet-il au moins une solution (x, y, z) rationnelle ?