L2 Calcul formel Corrigé du contrôle du 20 avril

<u>Exercice 1</u> : Soit E le sev de $\mathbb{R}^4$ engendré par $v_1 := \begin{bmatrix}0\\1\\3\\2\end{bmatrix}$ et $v_2 := \begin{bmatrix}1\\3\\4\\2\end{bmatrix}$

Comme on l'a vu en cours, trouver un système d'équations de E revient à trouver une base de $E^\perp := \{ \varphi \in (\mathbb{R}^4)^*, \ \varphi(e) = 0 \ \forall e \in E \}$.

Un élément $\varphi \in (\mathbb{R}^4)^*$ est une application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$; on peut représenter un tel φ par un vecteur ligne $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ $(a_i \in \mathbb{R})$ en écrivant $\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} =: a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4$.

$E^\perp$ est alors défini par un système de deux équations linéaires ~~en~~ les a_i :

$$\begin{cases} \varphi(v_1) = 0 \\ \varphi(v_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0a_1 + 1a_2 + 3a_3 + 2a_4 = 0 \\ 1a_1 + 3a_2 + 4a_3 + 2a_4 = 0 \end{cases}$$

Ce système est déjà échelonné : on peut voir a_3 et a_4 comme des paramètres libres ; $(a_1$ et $a_2)$ sont ~~ab~~ déterminés uniquement par le système précédent.

Une base de $E^\perp$ est donc : $\begin{bmatrix} a_1 = 5 \\ a_2 = -3 \\ a_3 = 1 \\ a_4 = 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} a_1 = 4 \\ a_2 = -2 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = 1 \end{bmatrix}$.

Un système d'équations pour E est donc :

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 : Soit (S) le système suivant : $\begin{cases} 2x - 2y - 2z = b_1 \\ -x + 4y + 7z = b_2 \\ x + 2y + 5z = b_3 \end{cases}$

a) (S) se reformule en un système $MX = B$ où M est la matrice entière $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Si P et Q sont des matrices inversibles entières, le système $MX = B$ admet des solutions entières ssi le système $PMQ\,Y = PB$ en admet. On se ramène donc à un système "diagonal" en appliquant l'algorithme présenté en cours :

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 & b_1 \\ -1 & 4 & 7 & b_2 \\ 1 & 2 & 5 & b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & b_3 \\ -1 & 4 & 7 & b_2 \\ 2 & -2 & -2 & b_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & b_3 \\ 0 & 6 & 12 & b_3+b_2 \\ 0 & -6 & -12 & b_1-2b_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2+L_1 \\ L_3-2L_1 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{C_2-2C_1 \quad C_3-5C_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 6 & 12 & b_3+b_2 \\ 0 & -6 & -12 & b_1-2b_3 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 6 & 12 & b_3+b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_1-2b_3+b_3+b_2 \end{bmatrix} L_3+L_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 6 & 0 & b_3+b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_1+b_2-b_3 \end{bmatrix}$$

(S) a des solutions entières ssi $\begin{cases} 6 \mid b_2 + b_3 \\ \underline{\text{ET}} \ \ b_1 + b_2 - b_3 = 0 \end{cases}$

b) Le système (S) admet une solution rationnelle ssi $PMQY = PB$ en admet ie ssi

$$b_1 + b_2 - b_3 = 0$$