Contrôle du 11 décembre 2019
Durée: 0h45. Tous documents interdits.

1. On considère la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire $\langle v, w \rangle = {}^t v w$.

1.a. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

1.b. Calculer le polynôme caractéristique de A et déterminer les deux valeurs propres de A que l'on notera $\lambda < \mu$.

1.c. Montrer que E_λ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ formé des vecteurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $2x + y + z = 0$. Quelle est sa dimension ? Compléter le vecteur $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \in E_\lambda$ en une base orthonormée de E_λ.

1.d. Calculer E_μ et donnez-en une base orthonormée. En déduire une base orthonormée de $(\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle)$ formée par des vecteurs propres de A.

1.e. Expliciter une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale D.

1.f. Montrer que l'orthogonal de E_μ s'identifie à E_λ et vice-versa.

1.g. Montrer que $\langle Av, v \rangle = {}^t w D w$ pour $w = P^{-1} v$ (cf. **1.e** pour la notation). En déduire l'existence d'un vecteur non-nul $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $\langle Av, v \rangle = 0$.

1.h. Déterminer la signature de la forme quadratique définie par

$$q(x, y, z) = 3x^2 + 4xy + 4xz + 2yz.$$

Barème indicatif: 0.5 + 1.5 + 1.5 + 1.5 + 1.5 + 1.5 + 1.5 + 0.5 = 10