Contrôle du 22 décembre 2017
Durée: 2h00. Tous documents interdits.

1. On considère la matrice complexe $A = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 3 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$.

1.a. Calculer les valeurs et espaces propres de A. Pourquoi les valeurs propres de A sont-elles toutes réelles ?

1.b. Trouver une base orthonormée de l'espace hermitien $(\mathbb{C}^3, <-,->)$ formée par des vecteurs propres de A. En déduire une matrice $U \in Gl_3(\mathbb{C})$ telle que $U^{-1}AU$ soit diagonale et telle que $U^{-1} = {}^t\bar{U}$.

1.c. Y a-t-il une matrice $B \in M_3(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$? Est-elle unique ? Si oui, donner une formule pour B.

1.d. Y a-t-il un vecteur non nul $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ annulant la forme hermitienne $q(x, y, z) = 2x\bar{x} + 3y\bar{y} + 2z\bar{z} + i(x\bar{y} - \bar{x}y) + i(y\bar{z} - \bar{y}z)$? Justifier votre réponse en utilisant la signature de la forme hermitienne q.

2. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ des polynômes réelles de degré ≤ 2. On munit E de la forme bilinéaire symétrique

$$<P, Q> = \int_{-1}^{1} tP(t)Q(t)dt.$$

2.a. Montrer que $<-,->$ est définie positive.

2.b. Déterminer les produits scalaires $< X^{i-1}, X^{j-1} >$ pour $1 \leq i, j \leq 3$.

2.c. En vous servant de **2.b** trouver des polynômes P_0, P_1, P_2 tels que $\deg(P_i) = i$ et (P_0, P_1, P_2) forme une base orthonormée de $(E, <-,->)$.

2.d. Quel est l'orthogonal de l'ensemble des polynômes $P \in E$ vérifiant $P(0) = 0$? *Indication:* effectuer les calculs dans le repère orthonormé du **2.c**.

3. On considère la matrice $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

3.a. Calculer le polynôme caractéristique de $A(m)$.

3.b. Pour quels m la matrice $A(m)$ est-elle diagonalisable ? Justifier.

3.c. Trouver une matrice inversible $P \in Gl_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}A(1)P$ soit sous forme de Jordan. En déduire une formule pour $A(1)^k$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Barême indicatif: (2+2+1.5+1)+(1.5+1.5+2+2)+(1.5+2+3)=20pts