Corrigé de l'examen d'Algèbre et Géométrie du 17 décembre 2018

Exercice 1

1. On vérifie que $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ d'où $A(D)=D$.

   La matrice A est orthogonale, car ses vecteurs-colonne forment une b.o.n. Autrement dit, on a ${}^tAA=I_3$. Par conséquent, pour tous $x,y\in\mathbb{R}^3$ on a
   $$\langle x,y\rangle={}^txy={}^tx{}^tAAy={}^t(Ax)(Ay)=\langle Ax,Ay\rangle.$$
   Il s'en suit que si $y\in D^\perp$, donc $\langle z,y\rangle=0$ pour $z=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, alors $\langle Az,Ay\rangle=0$ mais puisque $Az=z$, cela implique $\langle z,Ay\rangle=0$ donc $Ay\in D^\perp$.
   Par conséquent $A(D^\perp)\subset D^\perp$. Comme A est inversible, on a égalité.

2. Une b.o.n. pour D est donnée par le vecteur $f_1=\frac{z}{\|z\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$. L'orthogonal $D^\perp$ est défini par $\langle z,x\rangle=0$ c'est-à-dire l'ensemble des $x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3\in\mathbb{R}^3$ vérifiant $x_1+x_3=0$ et x_2 quelconque, d'où
   $$D^\perp=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\oplus\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$
   Il s'ensuit qu'une b.o.n. pour $D^\perp$ est donnée par
   $$f_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\text{ et }f_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$
   Il vient que $(\mathbb{R}^3,\langle -,-\rangle)$ admet $B=(f_1,f_2,f_3)$ comme b.o.n. *Hors barême :* Cette b.o.n. est *directe* puisque le déterminant de la matrice (f_1,f_2,f_3) vaut $+1$.

3. Pour expliciter la matrice $R=\mathrm{Mat}(A)_B$ il s'agit d'exprimer Af_1,Af_2,Af_3 dans la base (f_1,f_2,f_3). Comme $Af_1=f_1$ la première colonne de R est le premier vecteur e_1 de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. D'après les questions précédentes, on sait que $Af_2=af_2+bf_3$ et $Af_3=cf_2+df_3$ pour des coefficients $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Un calcul explicite montre
   $$Af_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}\frac12\\-\frac{\sqrt6}{2}\\-\frac12\end{pmatrix}=\frac12f_2-\frac{\sqrt3}{2}f_3\text{ et }Af_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt6}{4}\\\frac12\\-\frac{\sqrt6}{4}\end{pmatrix}=\frac{\sqrt3}{2}f_2+\frac12f_3.$$
   On obtient donc
   $$R=\mathrm{Mat}(A)_B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac12&\frac{\sqrt3}{2}\\0&-\frac{\sqrt3}{2}&\frac12\end{pmatrix}$$
   montrant que l'endomorphisme A représente une rotation d'axe D et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. *Hors barême :* l'orientation de cet angle est correcte puisque le repère (f_1,f_2,f_3) est direct.

4. La matrice de passage O de la base canonique (e_1, e_2, e_3) vers la base (f_1, f_2, f_3) est donnée par les vecteurs-colonne (f_1, f_2, f_3). La formule de changement de base donne $O^{-1}AO = R$, c'est-à-dire $A = ORO^{-1}$. Puisque (f_1, f_2, f_3) est une b.o.n., la matrice de changement de base O appartient à $O_3(\mathbb{R})$ (comme le repère est direct, on a $O \in SO_3(\mathbb{R})$).

Exercice 2

1. Le polynôme caractéristique est $p_H(X) = -(X-1)^2(X-4)$.
   La matrice H possède donc une valeur propre 1 de multiplicité 2, et une valeur propre 4 de multiplicité 1. Les valeurs propres sont réelles car H est une matrice hermitienne.
   Les dimensions des espaces propres sont égales à la multiplicité de la valeur propre, car toute matrice hermitienne est diagonalisable.
   Un calcul explicite montre
$$E_1 = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & i & i \\ -i & 1 & 1 \\ -i & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x_1 + ix_2 + ix_3 = 0 \right\} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$
$$E_4 = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -2 & i & i \\ -i & -2 & 1 \\ -i & 1 & -2 \end{pmatrix} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Comme $1 \neq 4$ on sait que $E_1 \perp E_4$. Il suffit donc de trouver une b.o.n. pour E_1 et une b.o.n. pour E_4. Pour E_4 il s'agit de normaliser le vecteur de base, ce qui donne
$$f_3 = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$
   Les deux vecteurs de base de E_1 trouvés ci-dessus ne sont ni orthogonaux ni normalisés. On va normaliser le premier et remplacer le second par un vecteur qui est orthogonal au premier tout en appartenant à E_1 (i.e. $f_2 = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ doit vérifier $x_1 + ix_2 + ix_3 = 0$ et $1\bar{x_1} + i\bar{x_2} = 0$ et $\|f_2\| = 1$). Cela donne
$$f_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } f_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{i}{\sqrt{6}} \\ \frac{2i}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$
   Les trois vecteurs (f_1, f_2, f_3) forment donc une b.o.n. de $(\mathbb{C}^3, \langle -, - \rangle)$ de sorte que la matrice $U = (f_1, f_2, f_3)$ est unitaire. Comme f_1, f_2 sont des vecteurs propres de H de valeur propre 1 et f_3 est un vecteur propre de valeur propre 4 on obtient
$$U^{-1}HU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Pour $v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in \mathbb{C}^3$ on obtient
$$\begin{aligned} q(v) &= 2(|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2) + i(x_1\bar{x_2} - \bar{x_1}x_2) + i(x_1\bar{x_3} - \bar{x_1}x_3) + (x_2\bar{x_3} + \bar{x_2}x_3) \\ &= 2(|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2) + 2\Im(x_1\bar{x_2}) + 2\Im(x_1\bar{x_3}) + 2\Re(x_2\bar{x_3}) \end{aligned}$$
   qui est visiblement un nombre réel. De manière abstraite, $q(v) \in \mathbb{R}$ puisque la forme quadratique q est associée à la forme sesquilinéaire symétrique $(v, w) \mapsto {}^t vH\bar{w}$ et l'on a $\overline{{}^t vH\bar{w}} = {}^t\bar{v}\bar{H}w = {}^t\bar{v}{}^tHw = {}^t(H\bar{v})w = {}^twH\bar{v}$ ce qui donne le résultat pour $v = w$.

4. La signature de la forme quadratique q est $(3,0)$ puisque H possède trois valeurs propres strictement positives. Par conséquent (en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz), l'origine de $\mathbb{C}^3$ est l'unique vecteur q-isotrope, c'est-à-dire $q(v)=0$ implique $v=0$.

Exercice 3

1. Le polynôme caractéristique se calcule comme suit :

$$p_{C_m}(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & -1 \\ 1 & 1-X & 1+m \\ 1-m & m & 2-X \end{vmatrix} \overset{C2:=C2+C3}{=} \begin{vmatrix} -X & 0 & -1 \\ 1 & 2+m-X & 1+m \\ 1-m & 2+m-X & 2-X \end{vmatrix}$$
$$\overset{L3:=L3-L2}{=} \begin{vmatrix} -X & 0 & -1 \\ 1 & 2+m-X & 1+m \\ -m & 0 & 1-m-X \end{vmatrix}$$

En développant ce déterminant selon la deuxième colonne on obtient

$$\begin{aligned} p_{C_m}(X) &= (2+m-X)(-X(1-m-X)-m) \\ &= (2+m-X)(X^2+(m-1)X-m) \\ &= -(X-(m+2))(X+m)(X-1) \end{aligned}$$

Il vient que les valeurs propres de C_m sont $m+2, -m$ et 1.

2. Les trois valeurs propres sont deux à deux distinctes si et seulement si $m \neq -1$. Dans ce cas C_m est diagonalisable.
3. Si $m=-1$ alors C_{-1} a une valeur propre 1 de multiplicité 3. L'espace propre de C_{-1}

$$E_1 = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est de dimension $1<3$ donc C_{-1} n'est pas diagonalisable, mais trigonalisable puisque son polynôme caractéristique $-(X-1)^3$ est scindé.

4. Puisque la dimension de E_1 est 1, la réduite de Jordan de C_{-1} contient un seul bloc de Jordan de la forme

$$J_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le premier vecteur de la base de Jordan associée est vecteur propre de C_{-1} et peut donc être choisi $f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les deux autres vecteurs de la base de Jordan s'obtiennent en résolvant successivement les équations $(C_{-1}-I_3)f_2 = f_1$ et $(C_{-1}-I_3)f_3 = f_2$. On obtient comme solutions possibles

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Pour la matrice de changement de base $P=(f_1,f_2,f_3)$ il vient $P^{-1}C_{-1}P = J_{1,3}$.

Barème : (2+2+2+1)+(2+2+2+1)+(2+1+1+2)