Algèbre et Géométrie
Partiel - CORRECTION

Mardi 6 novembre 2018, durée : 2 heures

Exercice 1
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ trigonalisable sur $\mathbb{K}$. On note p_A et μ_A le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A respectivement. A est trigonalisable donc p_A est scindé sur $\mathbb{K}$.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton p_A est un polynôme annulateur de A. Donc μ_A divise p_A dans $\mathbb{K}[X]$. Ainsi l'ensemble des racines de μ_A est inclus dans l'ensemble des racines de p_A.

Notons μ_A sous la forme $\mu_A(X) = \sum_{s=0}^{k} a_s X^s$ où k est le degré de μ_A, $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in \mathbb{K}$ et $a_k \in \mathbb{K}^*$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une racine de p_A *i.e.* soit λ une valeur propre de A. Soit v un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Le vecteur v est donc non nul. On sait que μ_A est un polynôme annulateur de A. On a donc:

$$0 = \mu_A(A)v = \sum_{s=0}^{k} a_s A^s v = \sum_{s=0}^{k} a_s \lambda^s v = \mu_A(\lambda)v.$$

Comme v est non nul, on a $\mu_A(\lambda) = 0$. Ainsi λ est racine du polynôme μ_A. En conséquence l'ensemble des racines de p_A est inclus dans l'ensemble des racines de μ_A.

Ainsi le résultat est démontrer par double implication (même double inclusion).

Exercice 2
Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère la matrice A_m de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A_m = \begin{pmatrix} 3 & m+1 & -(m+5) \\ 2 & m & -(m+3) \\ 2 & m+1 & -(m+4) \end{pmatrix}.$$

1. Soit p_A le polynôme caractéristiques de A. On a:

$$\begin{aligned} p_A(X) = \det(A - XI_3) &= \begin{vmatrix} 3-X & m+1 & -(m+5) \\ 2 & m-X & -(m+3) \\ 2 & m+1 & -(m+4+X) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1-X & m+1 & -(m+5) \\ -1-X & m-X & -(m+3) \\ -1-X & m+1 & -(m+4+X) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-X & m+1 & -(m+5) \\ 0 & -1-X & 2 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= -(X-1)(X+1)^2. \end{aligned}$$

Ainsi A_m a deux valeurs propres distinctes -1 et 1. La matrice A_m est donc diagonalisable si et seulement $\mathrm{rg}(A_m + I_3) = 1$. Déterminons le rang de la matrice $A_m + I_3$. On a

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 4x & + & (m+1)y & - & (m+5)z & = & 0 \\ 2x & + & (m+1)y & - & (m+3)z & = & 0 \\ 2x & + & (m+1)y & - & (m+3)z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} 4x & + & (m+1)y & - & (m+5)z & = & 0 \\ 2x & + & (m+1)y & - & (m+3)z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} 4x & + & (m+1)y & - & (m+5)z & = & 0 \\ & & (m+1)y & - & (m+1)z & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi $\mathrm{rg}(A_m + I_3) = 1$ si et seulement si $m + 1 = 0$. Ainsi A_m est diagonalisable si et seulement si $m = -1$.

2. μ_{A_m} est le polynôme minimal de A_m.

   Cas $m=-1$ On a déjà vu que $\mu_{A_m}=(X-1)(X+1)$.

   Cas $m\neq -1$ La matrice A_m n'est donc pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ donc

$$\mu_{A_m}=(X-1)(X+1)^2$$

   .

3. On suppose A_m diagonalisable sur $\mathbb{R}$ donc $m=-1$. La matrice A_{-1} sera simplement notée A. On a $A=\begin{pmatrix}3&0&-4\\2&-1&-2\\2&0&-3\end{pmatrix}$. On sait que le polynôme minimal de A est $\mu_A(X)=(X-1)(X+1)$. Donc $A^2=I_3$. Soit donc $n\in\mathbb{N}$. Si n est pair alors $A^n=I_3$ et si n est impair alors $A^n=A$.

4. Si A_m n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ alors $\mu_{A_m}=(X-1)(X+1)^2=X^3+X^2-X-1$. On sait que μ_{A_m} est un polynôme annulateur de A_m, donc $(A_m)^3+(A_m)^2-A_m-I_3=0$, d'où $A_m((A_m)^2+A_m-I_3)=I_3$. Ainsi $(A_m)^{-1}=(A_m)^2+A_m-I_3$. Si A_m est diagonalisable, on a vu que $(A_m)^2=I_3$. On a donc que $(A_m)^{-1}=A_m$. On a $(A_m)^2+A_m-I_3=A_m$. La formule reste donc valable.

Exercice 3

On considère la matrice $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&4&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$.

1. Soit p_A le polynôme caractéristique de A. On a:

$$\begin{aligned}
p_A(X)=\det(A-XI_3)&=\begin{vmatrix}1-X&-1&1\\1&4-X&-1\\0&1&2-X\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}2-X&-1&1\\0&4-X&-1\\2-X&1&2-X\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-X&-1&1\\0&4-X&-1\\0&2&1-X\end{vmatrix}\\
&=-(X-2)\begin{vmatrix}4-X&-1\\2&1-X\end{vmatrix}\\
&=-(X-2)\begin{vmatrix}3-X&-1\\3-X&1-X\end{vmatrix}=-(X-2)\begin{vmatrix}3-X&-1\\0&2-X\end{vmatrix}=-(X-3)(X-2)^2.
\end{aligned}$$

   Les deux valeurs propres distinctes de A sont $\lambda=2$ et $\mu=3$.

2. Soient E_λ et E_μ les espaces propres associés aux valeurs propres 2 et 3 respectivement. On a:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_\lambda \iff (A-2I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}x-z=0\\y=0\end{cases}\iff\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

   et

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_\mu \iff (A-3I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}y-z=0\\x=0\end{cases}\iff\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

   On a donc $E_\lambda=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $E_\mu=\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. On a $\dim(E_\lambda)=1\neq 2=\mathrm{mult}(2)$ donc A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

3. Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$ donc A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Soit φ_A le polynôme minimal de A. On sait que A n'est pas diagonalisable, que φ_A divise p_A dans $\mathbb{R}[X]$, que φ_A est unitaire et que p_A et φ_A ont mêmes racines donc $\varphi_A = (X-3)(X-2)^2$.

   La valeur propre μ est de multiplicité 1 donc $V(\mu) = E_\mu = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Déterminons l'espace caractéristique $V(\lambda)$ associé à la valeur propre 2. On sait que E_λ est un sous-espace vectoriel de $V(\lambda)$ et que $\dim(V(\lambda)) = 2$. Complétons donc la base de E_λ déja trouvée en une base de $V(\lambda)$ sous la forme (u,v) avec $u = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et v tel que $Av = \lambda v + u = 2v + u$.

   Posons v sous la forme $v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Résolvons le système $(S)\begin{cases}-x - y + z - 1 = 0\\ x + 2y - z = 0\\ y - 1 = 0\end{cases}$. On a

$$(S) \iff \begin{cases}-x + z = 2\\ y = 1\end{cases} \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

   Prenons par exemple $v = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$. On a alors $V(\lambda) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$.

4. Par construction, $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de Jordan. En posant $P = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$, on a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix} = T.$$

   On a $\det(P) = -1$ et $\mathrm{Com}(P) = \begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&1&-2\\0&-1&1\end{pmatrix}$ donc $P^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&-1&1\\1&2&-1\end{pmatrix}$

5. On sait que la décomposition de Dunford de T est donnée par $T = D_T + N_T$ avec

$$D_T = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix} \text{ et } N_T = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

   Ainsi la décomposition de Dunford de A est donnée par $A = D_A + N_A$ avec

$$\begin{aligned}D_A =& PD_TP^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&-1&1\\1&2&-1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&3\\2&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&-1&1\\1&2&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0&0\\1&4&-1\\1&2&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

   et

$$N_A = A - D_A = \begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&0&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}.$$

   La décomposition est unique car on écrit A comme somme d'une matrice diagonalisable D_A et d'une matrice nilpotante N_A telles que D_A et N_A commutent entre elles.