Feuille d'exercices n^o 3

1. Développer en série formelle la fraction rationnelle $f(X) = \frac{1}{X^2-(3+i)X+2(1+i)}$.

2. Soit $(s_n)_{n\geq 0}$ la suite numérique définie par

$$s_0 = 1,\ s_1 = 2,\ \text{et}\ s_{n+2} = \frac{1}{2}(s_n - s_{n+1}).$$

2.a. Montrer que la série génératrice $\sum_{n\geq 0} s_n X^n$ s'identifie à $\frac{-5X-2}{(X+1)(X-2)}$.

2.b. Décomposer la fraction rationnelle obtenue en **2.a**.

2.c. Donner une formule non récursive pour les s_n. Vérifier pour des petites valeurs de n. En déduire les limites $\lim_{n\to\infty} s_{2n}$ et $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$.

3. Les nombres de Fibonacci sont définis par $f_0 = 0, f_1 = 1$ et $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$. La *série génératrice* des nombres de Fibonacci est $f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k X^k \in \mathbb{C}[[X]]$.

3.a. Montrer que $f(X) = \frac{X}{1-X-X^2}$.

3.b. On note $\alpha > \beta$ les deux racines de $X^2 + X - 1$. Montrer $\alpha + \beta = \alpha\beta = -1$ et $\alpha - \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. En déduire que $f(X) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{\alpha}{X-\alpha} + \frac{\beta}{X-\beta}\right)$.

3.c. En déduire que $f_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$ et que $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = -\beta$.

4.a. Déterminer le développement de Taylor à l'origine de la fonction

$$f :]-1,1[\to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{1+x}.$$

4.b. On pose $q_0(t) = 1$ et $q_n(t) = \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}$ pour $n \geq 1$. Montrer que le développement de Taylor de f s'identifie à $\sum_{n=0}^{\infty} q_n(\frac{1}{2})X^n$.

4.c. Les nombres de Catalan sont définis par la règle de récurrence: $c_0 = 0, c_1 = 1$ et $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$. En fait, c_n compte le nombre de "parenthésages" distincts d'un mot de longueur n. On pose $c(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$. Montrer que $c(X)^2 + X = c(X)$.

4.d. En déduire que $c(X) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4X})$ puis la valeur de c_n pour tout n.

5.a. Trouver $A(X) \in \mathbb{C}[[X]]$ vérifiant $A(0) = 0$ et $A'(X) = \frac{1}{\sqrt{1-X^2}}$.

5.b. En utilisant que $\sin(\arcsin(x)) = x$ pour $x \in]-1,1[$ identifier $A(X)$ au développement de Taylor à l'origine de arcsin.

5.c. En déduire une série numérique qui converge vers $\frac{\pi}{6}$. La convergence de cette série numérique est-elle lente ou rapide ?

Mots-Clés : Série formelle, nombres de Fibonacci/Catalan, fraction rationnelle.