Examen du 10 janvier 2012
Durée : 2h00. Tous documents interdits.

Barème indicatif : **7 + 6 + 7 = 20 pts**

1. Séries formelles et séries numériques. On pose

$$s(X) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n X^n \text{ pour } s_n = \begin{cases} (-1)^m & \text{si } n = 2m \quad (m \in \mathbb{N}); \\ (-1)^m & \text{si } n = 2m+1 \quad (m \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

1.a. Montrer que $s(X)$ s'identifie à une fraction rationnelle qu'on explicitera. Indication: On pourra écrire $s(X) = a(X) + b(X)$ avec

$$a(X) = \sum_{m \geq 0} (-1)^m X^{2m} \quad \text{et} \quad b(X) = \sum_{m \geq 0} (-1)^m X^{2m+1},$$

et étudier $a(X)$ et $b(X)$ séparément.

1.b. Déterminer la primitive $S(X)$ de $s(X)$ qui vérifie $S(0) = 0$. Expliciter une fonction réelle dont le développement de Taylor à l'origine s'identifie à $S(X)$.

Déduire de ce qui précède la somme de la série numérique

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n+1} &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \pm \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} - \frac{1}{8 \cdot 9} \pm \cdots . \end{aligned}$$

1.c. Expliciter les coefficients du développement en série formelle de $\frac{1}{1+X^3}$. En déduire le développement en série formelle $\sum_{n \geq 0} u_n X^n$ de la fraction rationnelle $u(X) = \frac{1-X+4X^2}{1+X^3}$.

1.d. Décomposer la fraction rationnelle $u(X)$ de **1.c** sous la forme

$$u(X) = \frac{\alpha}{1+X} + \frac{\beta + \gamma X}{1 - X + X^2}$$

avec des coefficients $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ à déterminer. En déduire une primitive de $u(X)$, puis la somme de la série numérique $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n+1}$.

2. Equations différentielles du second ordre.

2.a. Donner l'ensemble des fonctions deux fois dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y(x)$ qui sont solutions de l'équation différentielle $y''(x) + y'(x) - 6y(x) = xe^{2x}$.

2.b. Donner l'ensemble des fonctions deux fois dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y(x)$ qui sont solutions de l'équation différentielle $y''(x) + 4y(x) = 0$.

2.c. Donner l'ensemble des fonctions deux fois dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y(x)$ qui sont solutions de l'équation différentielle $y''(x) + 4y(x) = \cos(2x)$.

3. Exponentielle de matrice et équation différentielle linéaire. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

3.a. Déterminer les valeurs propres de A. En déduire une matrice de changement de base $P \in Gl_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

3.b. Calculer P^{-1}.

3.c. Calculer $exp(tA)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

3.d. Trouver l'unique fonction dérivable $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ qui vérifie

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) - z(t) \\ z'(t) = 2x(t) - y(t) + 2z(t). \end{cases}$$

Que peut-on dire de la trajectoire $t \mapsto \phi(t)$ quand $t \to \pm\infty$?