Partiel du 23 octobre 2013

Durée : 1h30. Tous documents interdits. Barème: 7 + 7 + 6

1. Fraction rationnelle, suite récurrente et série formelle.

Soit la fraction rationnelle $s(X) = \frac{-3}{X^2+X-2}$ et soit $(s_n)_{n\geq 0}$ la suite récurrente définie par

$$s_0 = \frac{3}{2},\ s_1 = \frac{3}{4} \text{ et } s_{n+2} = \frac{s_{n+1}+s_n}{2}.$$

1.a. Montrer que dans $\mathbb{C}[[X]]$ on a $s(X) = \sum_{n\geq 0} s_n X^n$.

1.b. Ecrire $s(X)$ sous forme $\frac{\beta_1}{\alpha_1 - X} + \frac{\beta_2}{\alpha_2 - X}$ avec $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$.

1.c. Déduire de **1.a** et **1.b** une formule explicite pour s_n. Déterminer $\lim_{n\to\infty} s_n$.

2. Séries entières. On définit les séries entières

$$s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)z^n,\ t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nz^n \text{ et } u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

2.a. Montrer que le rayon de convergence des trois séries entières est $R = 1$. En déduire que la somme de la série entière $u(z)$ est $\frac{1}{1-z}$ quand $|z| < 1$.

2.b. En dérivant la fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ une fois, montrer que la somme de la série entière $t(z)$ est $\frac{z}{(1-z)^2}$ quand $|z| < 1$. En dérivant la fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ deux fois, déterminer la somme de la série entière $s(z)$ quand $|z| < 1$.

2.c. Déduire de **2.b** la somme de la série entière $p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$ quand $|z| < 1$.

En particulier, déterminer la somme de la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

3. Somme des premiers n carrés d'entiers.

3.a. Montrer l'identité $(1 + 2 + \cdots + n) + (n + (n-1) + \cdots + 1) = n(n+1)$.

3.b. On pose $a_{ij} = j$ et on suppose que $1 \leq j \leq i \leq n$. Montrer l'identité

$$\frac{1}{2}\left(1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n(n+1)\right) = n\cdot 1 + (n-1)\cdot 2 + \cdots + 2\cdot(n-1) + 1\cdot n$$

en identifiant le côté gauche (resp. droite) à $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij}$ (resp. $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij}$).

3.c. En utilisant la distributivité montrer l'identité

$$n\cdot 1 + (n-1)\cdot 2 + \cdots + 2\cdot(n-1) + 1\cdot n = n(1+2+\cdots+n) - (1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + (n-1)n)\,.$$

3.d. Déduire de **3.b**, **3.c** et **3.a** les identités

$$\frac{3}{2}\left(1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n(n+1)\right) = n(1+2+\cdots+n) + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{2}.$$

En déduire (à l'aide de $\mathrm{n}^2 + n = n(n+1)$) une formule pour $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.