Examen du 12 février 2015

1 heure

La correction tiendra compte de la clarté et de la concision de la rédaction.
L'utilisation de calculatrices et de téléphones portables est interdite.

* *
*
* *
*

Exercice 1. On considère la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_6$ définie par

i	1	2	3	4	5	6
$\sigma(i)$	5	3	6	4	1	2

a) Décomposer σ en produit de permutations cycliques à supports disjoints.

b) Quel est l'ordre de σ ? Quelle est sa signature ? Quelles sont ses puissances ?

c) Montrer que σ est conjugué dans $\mathfrak{S}_6$ à la permutation $\sigma' = (1\,2)(3\,4\,5)$ en explicitant un $\tau \in \mathfrak{S}_6$ tel que $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma'$.

d) Expliciter un $\sigma'' \in \mathfrak{S}_6$ ayant même ordre que σ mais n'étant pas conjugué à σ.

* *
*

Exercice 2. Soit D_8 le groupe diédral à 8 éléments, c'est-à-dire le sous-groupe de $O_2(\mathbb{R})$ engendré par la rotation ρ d'angle $\frac{\pi}{2}$ et la symétrie σ qui envoie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sur $(x, -y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Décrire la transformation orthogonale $\sigma\rho\sigma^{-1}$.

b) Soit X l'ensemble $\{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\} \subset \mathbb{R}^2$. Vérifier que pour tout $x \in X$, on a $\rho(x) \in X$ et $\sigma(x) \in X$. En déduire un morphisme de groupes $\varphi : D_8 \to \mathrm{Bij}(X)$.

c) On identifiera X à l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$, et donc $\mathrm{Bij}(X)$ à $\mathfrak{S}_4$. Expliciter $\varphi(\sigma)$ et $\varphi(\rho)$. Montrer que φ est *injectif*.

d) En déduire que l'image de D_8 par φ est un 2-Sylow de $\mathfrak{S}_4$.