Examen du 22 avril 2014

1 heure 30

La correction tiendra compte de la clarté et de la concision de la rédaction.
L'utilisation de calculatrices et de téléphones portables est interdite.

* *
*

Exercice 1. — **Question de cours**

a) Rappeler la définition d'un polygone régulier convexe.

b) Donner (sans démonstration) la nature géométrique des éléments du groupe orthogonal O(3). Pour θ réel, montrer que la matrice $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ est orthogonale et préciser sa nature géométrique (on ne demande pas ses éléments caractéristiques).

Exercice 2. — Dans cet exercice, on étudie quelques groupes finis de cardinal 24.

a) Déterminer à isomorphisme près tous les groupes abéliens d'ordre 24.

b) Soit p un nombre premier. Montrer que deux groupes finis isomorphes ont le même nombre de p-Sylow et que tout p-Sylow de l'un est isomorphe à tout p-Sylow de l'autre.

c) Quelles restrictions sur les nombres de sous-groupes de Sylow d'un groupe d'ordre 24 sont données par les théorèmes de Sylow ?

d) Montrer qu'il y a un unique morphisme de groupes *non-trivial* $\varphi : \mathbf{Z}/8\mathbf{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$.

Dans la suite, on pose $G_1 := \mathfrak{S}_4$, $G_2 := D_8 \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ (D_8 désigne le groupe diédral à 8 éléments) et $G_3 := \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \rtimes_\varphi \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ (où φ est le morphisme défini à la question précédente).

e) Calculer le nombre de 3-Sylow de G_1, G_2 et G_3.

f) Déterminer un 2-Sylow de G_2 et un 2-Sylow de G_3.

g) En déduire que les groupes G_1, G_2 et G_3 sont 2 à 2 non isomorphes.

Exercice 3. — On considère les points $A = (1, 1, 0), B = (-1, 1, 0), C = (-1, -1, 0), D = (1, -1, 0), E = (0, 0, 1), F = (0, 0, -1)$ de $\mathbb{R}^3$. On note H le plan contenant A, B, C, D et s_H la réflexion orthogonale de $\mathbb{R}^3$ admettant H comme plan de symétrie.

a) Montrer que s_H applique les segments $[A, E], [B, E], [C, E]$ et $[D, E]$ sur les segments $[A, F], [B, F], [C, F]$ et $[D, F]$. Montrer que ces segments ont tous la même longueur.

b) Montrer que les segments $[A, B], [B, C], [C, D], [D, A]$ ont tous la même longueur. En déduire que chacun de ces quatre segments forme la base de deux triangles isocèles, l'un ayant un sommet en E, l'autre en F. Décrire l'action de s_H sur l'ensemble de ces triangles.

c) On note P l'enveloppe convexe de $\{A, B, C, D, E, F\}$. Déterminer le nombre de faces et le nombre d'arêtes du polyèdre P. Vérifier la formule d'Euler. Le polyèdre P est-il régulier ?

d) Montrer qu'une transformation orthogonale de $\mathbb{R}^3$ qui préserve P, preserve nécessairement les ensembles $\{A, B, C, D\}$ et $\{E, F\}$. En déduire que le sous-groupe de O(3) des isométries de P s'identifie au produit direct du groupe diédral D_8 et de $\mathfrak{S}_2$.

e) Quelle dilatation faut-il appliquer à A, B, C, D (en fixant E et F) pour obtenir une enveloppe convexe $\tilde{P}$ qui soit un polyèdre régulier ? De quel polyèdre régulier s'agit-il ? Le groupe des symétries orthogonales de $\tilde{P}$ est-il plus grand ou plus petit que celui de P ?