Examen “Groupes et Géométrie” du 13 mai 2014

3 heures

La correction tiendra compte de la clarté et de la concision de la rédaction.
L'utilisation de calculatrices et de téléphones portables est interdite.

* *
*

Exercice 1. Groupe linéaire et droite projective sur un corps premier.

Soient p un nombre premier, $\mathbb{F}_p$ le corps à p éléments et $G = Gl_2(\mathbb{F}_p)$ le groupe des matrices 2×2 inversibles à coefficients dans $\mathbb{F}_p$. On note $U = U_2(\mathbb{F}_p)$ le sous-groupe des matrices $A = (a_{i,j})$ telles que $a_{1,2} \in \mathbb{F}_p$, $a_{2,1} = 0$ et $a_{1,1} = a_{2,2} = 1$.

a) Montrer que le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $(\mathbb{F}_p)^2$ possède $(p^2-1)(p^2-p)$ bases vectorielles. En déduire l'ordre du groupe G.

b) Montrer que U est un p-Sylow de G et que U n'est pas distingué dans G.

c) Montrer que tout élément d'ordre p de G est conjugué à un élément de U.

d) On note T le sous-groupe des matrices scalaires inversibles $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{F}_p^\times$, de G. Montrer que T est distingué dans G. Quel est l'ordre du groupe-quotient G/T ?

e) On rappelle que la droite projective $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_p)$ est l'ensemble des droites vectorielles du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $(\mathbb{F}_p)^2$. Montrer que le cardinal de $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_p)$ est $p+1$. En faisant agir G sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_p)$, construire un morphisme de groupes $\varphi : G \to \mathfrak{S}_{p+1}$.

f) Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) = T$. En déduire un morphisme de groupes injectif $\psi : G/T \to \mathfrak{S}_{p+1}$. Montrer que ψ est un isomorphisme pour $p = 2, 3$.

* *
*

Exercice 2. Groupes d'ordre 8 et quaternions.

a) Donner la liste de tous les groupes abéliens d'ordre 8 à isomorphisme près.

b) On considère le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$. Expliciter les puissances ρ^k de la permutation cyclique $\rho = (1\,2\,3\,4)$ et leurs conjugués $\sigma\rho^k\sigma^{-1}$ par la transposition $\sigma = (1\,3)$.

c) En déduire que le sous-groupe D de $\mathfrak{S}_4$ engendré par ρ et σ est isomorphe à un produit semi-direct $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et qu'il est un 2-Sylow de $\mathfrak{S}_4$. Montrer que D n'est pas distingué dans $\mathfrak{S}_4$. En déduire le nombre de 2-Sylow dans $\mathfrak{S}_4$.

d) On considère le sous-groupe Q du groupe $Gl_2(\mathbb{C})$ (des matrices 2×2 inversibles à coefficients complexes) engendré par les trois matrices

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $IJ = K$, $JK = I$, $KI = J$ et que $JI = -IJ$, $KJ = -JK$, $IK = -KI$. En déduire que $Q = \{\pm id_{\mathbb{C}^2}, \pm I, \pm J, \pm K\}$ est un sous-groupe d'ordre 8 de $Gl_2(\mathbb{C})$.

e) Montrer que les groupes D et Q ne sont pas isomorphes. Indication : on pourra comparer les ordres des éléments de D et de Q.

f) On note $SU_2(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de $Gl_2(\mathbb{C})$ de la forme $A(z,w) = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$.

Montrer que pour tout $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ on a $A(a+bi, c+di) = a.id_{\mathbb{C}^2} + b.I + c.J + d.K$. En déduire que $SU_2(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $Gl_2(\mathbb{C})$ contenant Q.

g) On note $Sp_3(\mathbb{R})$ le sous-groupe de $SU_2(\mathbb{C})$ formé par les matrices de déterminant 1. Une matrice de $SU_2(\mathbb{C})$ de la forme $A(0+bi, c+di)$ est dite *pure*. Montrer que si $A \in SU_2(\mathbb{C})$ est pure alors $\Phi A \Phi^{-1}$ est pure pour tout $\Phi \in Sp_3(\mathbb{R})$.

h) En identifiant l'ensemble des matrices pures de $SU_2(\mathbb{C})$ à $\mathbb{R}^3$ déduire de ce qui précède un morphisme de groupes $Sp_3(\mathbb{R}) \to Gl_3(\mathbb{R})$ qui associe à $\Phi \in Sp_3(\mathbb{R})$ la conjugaison par Φ. Montrer que celle-ci définit une transformation orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

* *
*

Exercice 3. Le groupe des isométries du cube. Soit C un cube centré en l'origine de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{I}_C$ son groupe des isométries.

a) Montrer que $\mathcal{I}_C$ est un sous-groupe de $O_3(\mathbb{R})$. On note alors $\mathcal{I}_C^+ := \mathcal{I}_C \cap SO_3(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\mathcal{I}_C$ agit sur l'ensemble à 4 éléments formé des grandes diagonales de C. On note $\varphi : \mathcal{I}_C \to \mathfrak{S}_4$ le morphisme associé.

c) Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{\pm id\}$.

d) Montrer que φ est surjective.

e) Montrer que le morphisme $(\varphi, det) : \mathcal{I}_C \to \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un isomorphisme.

f) Montrer que $\mathcal{I}_C^+$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

* *
*

Barême indicatif : 6 + 8 + 6