Examen du 2 mai 2016

3 heures

La correction tiendra compte de la clarté et de la concision de la rédaction.
L'utilisation de calculatrices et de téléphones portables est interdite.

* *
*

Exercice 1. — **Les groupes $\mathfrak{S}_p$ et $Sl_2(\mathbb{F}_p)$ et leurs sous-groupes de Sylow**

L'entier naturel p étant premier, $\mathfrak{S}_p$ désigne le groupe symétrique d'un ensemble à p éléments, et $Sl_2(\mathbb{F}_p)$ le groupe des matrices 2×2 de déterminant 1 à coefficients dans le corps fini $\mathbb{F}_p$. Pour tout groupe fini G, $|G|$ désigne l'ordre de G et $n_p(G)$ le nombre de p-Sylow de G.

a) Montrer que $Sl_2(\mathbb{F}_p)$ est le noyau d'un morphisme de groupes surjectif $Gl_2(\mathbb{F}_p) \to (\mathbb{F}_p^\times, \cdot, 1)$. En déduire $|Sl_2(\mathbb{F}_p)| = (p-1)p(p+1)$. Conclure que $|\mathfrak{S}_p| = |Sl_2(\mathbb{F}_p)|$ si et seulement si $p = 5$.

b) Montrer que si $p \neq 2$ alors $Sl_2(\mathbb{F}_p)$ possède un et un seul élément d'ordre 2 qu'on déterminera (résoudre l'équation $X = X^{-1}$ dans $Sl_2(\mathbb{F}_p)$). Quels sont les éléments d'ordre 2 de $\mathfrak{S}_p$? En déduire que les groupes $\mathfrak{S}_p$ et $Sl_2(\mathbb{F}_p)$ ne sont isomorphes pour aucun nombre premier p.

c) Montrer que les p-Sylow de $\mathfrak{S}_p$ sont isomorphes aux p-Sylow de $Sl_2(\mathbb{F}_p)$.

d) Déterminer le nombre d'éléments d'ordre p de $\mathfrak{S}_p$. En déduire $n_p(\mathfrak{S}_p)$ et établir ensuite la congruence de Wilson : $(p-1)! \equiv -1 \mod p$.

e) Expliciter le p-Sylow de $Sl_2(\mathbb{F}_p)$ contenant $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, sous-groupe noté $U_2(\mathbb{F}_p)$. Déterminer le sous-groupe $N_2(\mathbb{F}_p)$ de $Sl_2(\mathbb{F}_p)$ des matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $XUX^{-1} \in U_2(\mathbb{F}_p)$.

f) Montrer que $N_2(\mathbb{F}_p)$ est le stabilisateur en U de l'action de conjugaison de $Sl_2(\mathbb{F}_p)$ sur l'ensemble des p-Sylow de $Sl_2(\mathbb{F}_p)$. En déduire l'identité $n_p(Sl_2(\mathbb{F}_p)) = [Sl_2(\mathbb{F}_p) : N_2(\mathbb{F}_p)]$. Conclure que $n_p(\mathfrak{S}_p) = n_p(Sl_2(\mathbb{F}_p))$ pour tout nombre premier p.

g) Considérons $\mathfrak{S}_5$ comme groupe des bijections de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Pour tout choix de deux parties disjointes $\{i, j\}$ et $\{k, l\}$ de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, montrer que le sous-groupe $S_{(i,j;k,l)}$ de $\mathfrak{S}_5$ engendré par les transpositions (ij), (jk) et (kl) est isomorphe au groupe diédral D_8 à huit éléments (on pourra se servir de l'identité $(ijkl) = (ij)(jk)(kl)$). En déduire $n_2(\mathfrak{S}_5)$.

h) On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ de $Sl_2(\mathbb{F}_5)$. Montrer que $Q_8 = \{\pm id_2, \pm I, \pm J, \pm K\}$ est un sous-groupe de $Sl_2(\mathbb{F}_5)$, en fait un 2-Sylow de $Sl_2(\mathbb{F}_5)$.

i) Montrer que les 2-Sylow de $\mathfrak{S}_5$ ne sont pas isomorphes aux 2-Sylow de $Sl_2(\mathbb{F}_5)$. On pourra comparer le nombre d'éléments d'ordre 2 resp. 4 dans les groupes D_8 et Q_8.

j) Montrer que tout 2-Sylow de $Sl_2(\mathbb{F}_p)$ contient les matrices $\pm id_2$, et sinon que des matrices X d'ordre 4 vérifiant $-X = X^{-1}$. Combien y a-t-il de telles matrices dans $Sl_2(\mathbb{F}_5)$?

* *
*

Exercice 2. — **Octaèdre régulier et son groupe d'isométries**

On considère les six points

$$A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0), C = (-1, 0, 0), D = (0, -1, 0), E = (0, 0, 1), F = (0, 0, -1)$$

de $\mathbb{R}^3$ et son enveloppe convexe P (*l'octaèdre*). On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son repère canonique dans lequel les points seront notés $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On notera $s_H \in O(3)$

la réflexion orthogonale par rapport à un hyperplan $H \subset \mathbb{R}^3$. On note $\mathfrak{S}_P$ le groupe des transformations orthogonales $\varphi \in O(3)$ telles que $\varphi(P) = P$.

a) Montrer que l'enveloppe convexe des quatre points A, B, C, D est un carré équilatéral contenu dans l'hyperplan H_{EF} d'équation $z = 0$. Montrer que la réflexion $s_{H_{EF}}$ permute les sommets E et F et fixe les quatre autres sommets de P.

b) Montrer que les triangles ABE, BCE, CDE et DAE sont des triangles équilatéraux et que la réflexion $s_{H_{EF}}$ les transforme en les triangles ABF, BCF, CDF et DAF.

c) Vérifier la formule d'Euler pour l'octaèdre P. Expliciter un hyperplan H_{AC} (resp. H_{BD}) vérifiant que la réflexion $s_{H_{AC}}$ (resp. $s_{H_{BD}}$) permute les sommets A et C (resp. B et D), mais laisse fixe les quatre autres sommets de P.

d) Montrer que la rotation φ_z d'axe $x = y = 0$ et d'angle $\pi/2$ induit une bijection sur l'ensemble des sommets de l'octaèdre P qu'on explicitera. Même question pour la rotation φ_x (resp. φ_y) d'axe $y = z = 0$ (resp. $x = z = 0$). En déduire que P est un polyèdre convexe régulier.

e) On dira que trois sommets S_1, S_2, S_3 de P forme un triplet libre, si les vecteurs $\vec{OS_1}, \vec{OS_2}, \vec{OS_3}$ sont linéairement indépendants. Montrer que tout $\varphi \in \mathfrak{S}_P$ induit une bijection sur l'ensemble des sommets, et applique triplet libre sur triplet libre. *Indication :* on pourra utiliser (sans démonstration) que les sommets de P sont précisément les points de P qui se trouve sur la sphère-unité de $\mathbb{R}^3$.

f) Montrer que tout $\varphi \in \mathfrak{S}_P$ applique le barycentre d'une face de P sur le barycentre d'une face de P. *Indication :* Montrer d'abord que φ applique le barycentre de la face $S_1S_2S_3$ sur le barycentre de l'enveloppe convexe de $\varphi(S_1)\varphi(S_2)\varphi(S_3)$, et ensuite que $\varphi(S_1)\varphi(S_2)\varphi(S_3)$ est un triangle équilatéral et forme donc une face de P.

g) Soit B l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ passant par le barycentre d'une face de P. Montrer que B contient quatre droites, et que tout $\varphi \in \mathfrak{S}_P$ applique une droite de B sur une droite de B. En déduire un morphisme de groupes $\rho : \mathfrak{S}_P \to \mathfrak{S}_4$. Montrer que le noyau de ce morphisme est $\{\pm id_{\mathbb{R}^3}\}$.

h) Montrer que le déterminant induit un morphisme de groupes surjectif $\mathfrak{S}_P \to \{\pm 1\}$ dont le noyau est $\mathfrak{S}_P^+ = \mathfrak{S}_P \cap SO(3)$. En déduire un isomorphisme de groupes $\mathfrak{S}_P \cong \mathfrak{S}_P^+ \times \{\pm 1\}$.

i) Montrer que pour tout couple de droites distinctes $b_1, b_2 \in B$ il existe deux faces de P ayant une arête commune et telles que b_1, b_2 passent par leur barycentre respectif. En déduire que la réflexion s_H par rapport à l'hyperplan H contenant cette arête permute les deux droites.

j) Déduire de ce qui précède que l'image $\rho(\mathfrak{S}_P)$ contient toutes les transpositions de $\mathfrak{S}_4$. Conclure qu'on a des isomorphismes de groupes $\mathfrak{S}_P^+ \cong \mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{S}_P \cong \mathfrak{S}_4 \times \{\pm 1\}$.

* *
*

Barème indicatif : 10 + 10