Examen du 21 décembre 2017
Durée: 2h00. Tous documents interdits.

1. Compacité, Connexité. On dira qu'une application continue $f : X \to Y$ entre espaces topologiques X, Y est *à fibres compactes (resp. connexes)* si pour tout $y \in Y$ l'image inverse $f^{-1}(y)$ est une partie compacte (resp. connexe) de X. On dira que f est *fermée* si f applique les fermés de X sur des fermés de Y.

1.a. Montrer que la projection $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$ applique les ouverts de $\mathbb{R}^2$ sur des ouverts de $\mathbb{R}$ mais qu'elle n'applique pas tous les fermés de $\mathbb{R}^2$ sur des fermés de $\mathbb{R}$. *Indication:* étudier la courbe d'équation $xy = 1$.

1.b. Montrer que si X, Y sont des espaces topologiques compacts alors toute application continue $f : X \to Y$ est fermée à fibres compactes.

1.c. Soit $f : X \to Y$ une application continue. On pose

$$U^* = \{x \in U \,|\, f^{-1}(f(x)) \subset U\}.$$

Montrer que $X \backslash U^* = f^{-1}(f(X \backslash U))$. En déduire que si f est fermée alors pour tout ouvert U, U^* est un ouvert de X. Montrer que si f est également surjective alors l'image $f(U^*)$ est un ouvert de Y.

1.d. Soit $f : X \to Y$ une surjection continue fermée à fibres connexes. Montrer que X est connexe si et seulement si Y est connexe. *Indication:* si Y est connexe considérer une décomposition de X en deux parties fermées disjointes et montrer que leurs images restent disjointes puisque les fibres de f sont connexes.

1.e. Soit $f : X \to Y$ une surjection continue fermée à fibres compactes et soient X et Y séparés. Montrer que X est compact si et seulement si Y est compact. *Indication:* si Y est compact considérer un recouvrement de X par des ouverts $U_i, i \in I$. Montrer que pour $y \in Y$ il existe un ensemble fini d'indices $I_y \subset I$ tel que $U_y = \bigcup_{i \in I_y} U_i$ recouvre $f^{-1}(y)$. Montrer que les $f(U_y^*), y \in Y$, (cf. **1.c**) forment un recouvrement de Y. En déduire que X est compact.

2. Parties négligeables d'un espace mesuré. Une partie N d'un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est dite *μ-négligeable* si N est contenue dans une partie mesurable $B \in \mathcal{A}$ telle que $\mu(B) = 0$. On pose

$$\overline{\mathcal{A}} = \{C \subset X | \exists A, B \in \mathcal{A} : A \subset C \subset B \text{ et } \mu(B \backslash A) = 0\}.$$

2.a. Montrer que $\overline{\mathcal{A}}$ est une tribu sur X contenant la tribu $\mathcal{A}$ ainsi que toutes les parties μ-négligeables de X. Montrer que $\overline{\mathcal{A}}$ est la plus petite tribu ayant ces deux propriétés.

2.b. On définit $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ en posant $\overline{\mu}(C) = \mu(A) = \mu(B)$ pour un couple $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $A \subset C \subset B$ et $\mu(B \backslash A) = 0$. Montrer que cette définition ne dépend pas du choix du couple A, B.

Montrer que $\overline{\mu}$ est une mesure sur $(X, \overline{\mathcal{A}})$. Montrer que les parties $\overline{\mu}$-négligeables de X appartiennent à la tribu $\overline{\mathcal{A}}$.

2.c. Montrer que toute partie dénombrable de $[0,1]$ est Borel-mesurable (i.e. appartient à la tribu Borélienne $\mathcal{B}_{[0,1]}$ sur $[0,1]$). Quelle est la mesure de Lebesgue $\lambda(D)$ d'une partie dénombrable D de $[0,1]$? Montrer que si $f : [0,1] \to [0,1]$ est une fonction croissante, alors f est mesurable. *Indication:* on pourra utiliser (sans preuve) que toute fonction croissante est continue par morceaux avec un ensemble de discontinuité fini ou dénombrable.

2.d. On définit une suite décroissante de parties fermées $(A_n)_{n\geq 0}$ de $[0,1]$ comme suit: pour tout intervalle fermé $A = [a,b] \subset [0,1]$ on pose

$$\gamma_0(A) = [a, a + \frac{b-a}{3}] \text{ et } \gamma_2(A) = [a + \frac{2(b-a)}{3}, b].$$

On pose $A_0 = [0,1]$ et si A_{n-1} est réunion disjointe des 2^{n-1} intervalles fermés $A_{n-1}^{(i)}$ alors A_n est la réunion disjointe des 2^n intervalles fermés obtenus en remplaçant chaque $A_{n-1}^{(i)}$ par la réunion des deux intervalles $\gamma_0(A_{n-1}^{(i)})$ et $\gamma_2(A_{n-1}^{(i)})$.

Montrer que l'ensemble triadique de Cantor $A_\infty = \bigcap_{n\geq 0} A_n$ est Borel-mesurable et qu'on a $\lambda(A_\infty) = 0$. *Indication:* montrer d'abord $\lambda(\gamma_0(A)) = \frac{2}{3}\lambda(A)$ et $\lambda(A_{n+1}) = \frac{2}{3}\lambda(A_n)$ pour $n \geq 0$.

Montrer que l'ensemble triadique de Cantor est compacte et d'intérieur vide. Est-il dénombrable ?

2.e. On rappelle que tout point $x \in [0,1]$ possède une écriture dyadique $x = \sum_{n>0} \frac{\alpha_n(x)}{2^n}$ et triadique $x = \sum_{n>0} \frac{\beta_n(x)}{3^n}$ telles que $\alpha_n(x) \in \{0,1\}$ et $\beta_n(x) \in \{0,1,2\}$. Ces écritures sont uniques si pour $x \neq 1$ on exclut les séries telles que $\alpha_n(x)$ (resp. $\beta_n(x)$) sont presque tous 1 (resp. 2).

Montrer que $x \in A_\infty$ si et seulement si $\forall n : \beta_n(x) \neq 1$. En déduire que l'application $f : [0,1] \to [0,1]$ qui associe au point $x = \sum_{n>0} \frac{\alpha_n(x)}{2^n}$ le point $f(x) = \sum_{n>0} \frac{2\alpha_n(x)}{3^n}$ vérifie $f([0,1]) = A_\infty$. Conclure que l'image $f(P)$ de toute partie P de $[0,1]$ est λ-négligeable.

2.f. Montrer que f est une fonction croissante injective et donc en particulier mesurable d'aprs **2.c**. *Indication:* montrer d'abord que pour $x, y \in [0,1]$ les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) $x < y$;

(ii) il existe $m > 0$ tel que $\alpha_k(x) = \alpha_k(y)$ pour $k < m$ et $\alpha_m(x) < \alpha_m(y)$;

(iii) il existe $n > 0$ tel que $\beta_k(x) = \beta_k(y)$ pour $k < n$ et $\beta_n(x) < \beta_n(y)$.

En déduire que si $P \subset [0,1]$ n'est pas Borel-mesurable alors $f(P)$ non plus. Conclure qu'il existe des parties λ-négligeables de $[0,1]$ qui ne sont pas Borel-mesurables, i.e. $\mathcal{B}_{[0,1]} \neq \overline{\mathcal{B}}_{[0,1]}$.

Barême indicatif: (2+2+2+2+2) + (2+2+1.5+1.5+1.5+1.5) = 20 pts