Examen du 16 décembre 2015
Durée: 2h00. Tous documents interdits.

1. Homéomorphismes et projection stéréographique. On représente les points de la sphère-unité S^n de $\mathbb{R}^{n+1}$ par des couples $(\xi, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tels que $\|\xi\|^2 + x^2 = 1$.

1.a. Montrer que l'application $\phi : [-1, 1[\to [\frac{1}{2}, \infty[$ définie par $\phi(x) = \frac{1}{1-x}$ est un homéomorphisme. *Indication:* Construire l'application inverse.

1.b. On note $P = (0, 1) \in S^n$ le "pôle-nord". Montrer que l'application $\Phi : S^n - \{P\} \to \mathbb{R}^n : (\xi, x) \mapsto \phi(x)\xi$ est un homéomorphisme. *Indication:* Montrer que $\Psi(\xi) = (\lambda\xi, 1 - \lambda)$ pour $\lambda = \frac{2}{1+\|\xi\|^2}$ est l'application inverse de Φ.

1.c. On pose $S^n_+ = \{(\xi, x) \in S^n \,|\, x \geq 0\}$ et $S^n_- = \{(\xi, x) \in S^n \,|\, x \leq 0\}$. Montrer que S^n_+ et S^n_- sont des parties compactes de S^n vérifiant $S^n_+ \cup S^n_- = S^n$. Montrer que l'intersection $S^n_+ \cap S^n_-$ s'identifie à la sphère-unité S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$.

1.d. Montrer que l'image $\Phi(F)$ d'une partie fermée F de $S^n - \{P\}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. Montrer inversement que si l'image $\Phi(F)$ d'une partie F de $S^n - \{P\}$ est compacte, alors F est fermée. En déduire qu'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ possède un complémentaire compact si et seulement si $\Phi^{-1}(U) \cup \{P\}$ est un voisinage ouvert de P.

2. Locale connexité et composantes connexes. Pour un espace topologique E on considère les trois propriétés suivantes:

(C1) tout ouvert de E est réunion d'ouverts connexes;

(C2) tout point de E est contenu dans un ouvert connexe;

(C3) les composantes connexes de E sont ouvertes.

2.a. Montrer les implications $(C1) \implies (C2) \implies (C3) \implies (C2)$.

2.b. Montrer que $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie usuelle vérifie (C1). Montrer que la partie $F = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_*\}$ de $\mathbb{R}$, munie de la topologie induite, ne vérifie pas la propriété (C2), et donc pas non plus la propriété (C1).

2.c. Montrer qu'un espace compact vérifiant (C3) ne possède qu'un nombre fini de composantes connexes. Montrer que l'espace F de la question **2.b** est compact. Quelles sont les composantes connexes de F ?

2.d. On considère l'application $\phi : \mathbb{R} \to S^1 : t \mapsto e^{2\pi i t}$. Montrer que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, la restriction $\phi_{|]t_0-1/2, t_0+1/2[} :]t_0 - 1/2, t_0 + 1/2[\to S^1 - \{\phi(t_0 + 1/2)\}$ est un homéomorphisme. En déduire que le cercle-unité S^1, muni de la topologie induite, vérifie la propriété (C1).

3. Régularité des mesures boréliennes. On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \mu)$ où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ est la tribu des parties boréliennes de $\mathbb{R}^n$, et $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est une mesure *borélienne*, c'est-à-dire $\mu(K) < \infty$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$.

3.a. Montrer que toute partie fermée de $\mathbb{R}^n$ est réunion d'une suite croissante de parties compactes de $\mathbb{R}^n$. En déduire que la tribu $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ des parties boréliennes est engendrée par les parties compactes de $\mathbb{R}^n$.

3.b. Montrer que pour une suite décroissante $(A_n)_{n\geq 0}$ de parties boréliennes telles que $\bigcap_{n\geq 0} A_n = B$ et $\mu(A_0) < \infty$, on a $\inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu(B)$. *Indication:* considérer la suite croissante $B_n = A_0 - A_n$ et utiliser que $\bigcup_{n\geq 0} B_n = A_0 - B$.

3.c. Montrer que pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}^n$, les parties $U_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, K) < \frac{1}{n+1}\}$ sont ouvertes, de mesure finie, et vérifient:

$$\mu(K) = \inf_n \mu(U_n).$$

Une partie borélienne A est dite ϵ-*entourée* s'il existe une partie fermée F et une partie ouverte U telles que $F \subset A \subset U$ et $\mu(A - F) \leq \epsilon$ et $\mu(U - A) \leq \epsilon$.

3.d. Montrer que si A est ϵ-entourée alors $\mathbb{R}^n - A$ également. Montrer que si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de parties boréliennes telle que pour tout $n \geq 0$, A_n soit $\frac{\epsilon}{2^n}$-entourée, alors la réunion $A = \bigcup_{n\geq 0} A_n$ est 2ϵ-entourée.

3.e. Montrer que toute partie borélienne est ϵ-entouré pour tout $\epsilon > 0$. *Indication:* Montrer que l'ensemble des parties boréliennes qui sont ϵ-entourées pour tout $\epsilon > 0$ est une tribu contenant les parties compactes.

Conclure que pour toutes partie borélienne A et mesure borélienne μ, on a

$$\mu(A) = \inf_{A\subset U \text{ ouvert}} \mu(U) = \sup_{A\supset F \text{ fermé}} \mu(F).$$

Barême indicatif: 6 + 6 + 8