Feuille d'exercices n^{o}3

Compacité, Connexité.

1) Montrer que dans un espace topologique E qui est séparé, deux parties compactes disjointes A et B sont contenues dans des ouverts disjoints U et V. On pourra d'abord considérer le cas $A = \{a\}$.

2) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni de deux normes N_1, N_2.

a) Montrer que les boules-unité B_1, B_2 de E pour les normes N_1, N_2 sont compactes.

b) Montrer que $N_1(x) \leq \lambda N_2(x)$ pour tout $x \in E$ si et seulement si la norme N_1 restreinte à la boule-unité B_2 est majorée par λ.

c) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes équivalentes.

3) Parmi les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$, lesquelles sont compactes ?

a) $H_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 1, |x+y| \leq a\}$ pour $2 \leq a \leq \infty$;
b) $S_b = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -b|x| \leq y \leq 1 - x^2\}$ pour $b \in \mathbb{R}^+$;
c) $P_1 = \{(0,0)\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{\frac{1}{n}\} \times [0, \frac{1}{n}]$, $\quad P_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{n\} \times [0, \frac{1}{n}]$;
d) $S = \{(0,0)\} \cup \{(x, x\sin(\frac{1}{x})) \,|\, 0 < x \leq 1\}$;
e) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$, $\quad D_{\mathbb{Q}} = D \cap \mathbb{Q}^2$, $\quad D_{\mathbb{Z}} = D \cap \mathbb{Z}^2$;
f) Donner trois raisons du fait que $]0,1]$ n'est pas compact.

4) Montrer que si le graphe d'une fonction $f : X \to Y$ est fermé et l'espace d'arrivée Y est compact, alors f est continue. On pourra utiliser qu'une suite de points d'un espace compact ayant un seul point d'accumulation converge.

5) Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ une partie compacte et $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie standard.

a) Montrer que $A \times A$ est un fermé de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$.

b) Montrer que $A \times A$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^{2n}$.

c) On suppose que A n'est pas singleton. Montrer qu'une application contractante $\phi : A \to A$ ne peut être surjective. On pourra considérer les antécédants de deux points x, y de A qui réalisent le "diamètre" de A.

6) Montrer qu'il ne peut y avoir d'homéomorphisme reliant deux parmi les quatre espaces S^1, $[0,1]$, $\mathbb{R}$, $[0,1] \times \mathbb{R}$.

7) Soient $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$, $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy \geq 0\}$ et $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \leq y \leq x^2\}$.

a) Déterminer si D, H resp. L est *ouvert*, *fermé*, *compact*, *connexe*.

b) Même question pour $\mathbb{R}^2 - D$, $\mathbb{R}^2 - H$ resp. $\mathbb{R}^2 - L$.

c) Indiquer le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}^2 - D$, de $\mathbb{R}^2 - H$, de $\mathbb{R}^2 - L$, et de $\mathbb{R}^2 - (D \cup H \cup L)$.

8) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $e^{2\pi i f} = e^{2\pi i g} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

a) Rappeler pourquoi une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ est constante.

b) Démontrer l'existence d'une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $f = g + \lambda$.

9) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$.

a) Montrer qu'une boule d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé est convexe.

b) Soient $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to U$ des chemins continus tels que $\gamma_1(0) = a$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, $\gamma_2(1) = b$. Montrer qu'il existe un chemin continu $\gamma : [0,1] \to U$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

c) Soit A l'ensemble des points $b \in U$ pour lesquels il existe un chemin continu $\gamma : [0,1] \to U$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. Déduire de (a) et de (b) que A est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

d) Montrer que $U - A$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

e) Montrer qu'un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs.

10) Soit $A = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

a) Montrer que l'adhérence d'une partie connexe est connexe.

b) Montrer que l'adérence $\overline{A}$ de A est réunion de deux parties connexes de $\mathbb{R}^2$ qui se coupent en $\{0\} \times [-1,1]$.

c) En déduire que $\overline{A}$ est un fermé connexe de $\mathbb{R}^2$.

d) Montrer que $\overline{A}$ n'est pas connexe par arcs. Comparer avec (2e).

Mots-Clés: *Compacité, connexité, homéomorphie.*