Feuille d'exercices n^{o}3

INDICE D'UN LACET.

1. Le théorème de Lucas. Soit $P(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \in \mathbb{C}[z]$.

1.a. Montrer que $\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z-\alpha_1} + \frac{1}{z-\alpha_2}$.

1.b. Soit β une racine de $\frac{P'(z)}{P(z)}$. Montrer que $\frac{\beta-\alpha_1}{|\beta-\alpha_1|^2} + \frac{\beta-\alpha_2}{|\beta-\alpha_2|^2} = 0$. En déduire qu'il existe $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^+$ tels que $\mu_1 + \mu_2 = 1$ et $\beta = \mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2$. Conclure que le segment $[\alpha_1, \alpha_2]$ contient la racine de $P'(z)$.

1.c. Soit $Q(z) = (z - \alpha_1)\cdots(z - \alpha_n) \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme de degré n. En s'inspirant de ce qui précède, exhiber une partie compacte et connexe de $\mathbb{C}$ qui contient toutes les racines de $Q'(z)$.

2. L'indice d'un lacet. On rappelle que $Ind_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ est une fonction continue en $a \in \mathbb{C}$ à valeurs entières, appelée l'indice du lacet γ en a. On pose $\gamma_r^a(t) = a + re^{2\pi it}$ pour $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in [0,1]$.

2.a. Calculer $Ind_{\gamma_r^0}(0)$.

2.b. Montrer que $Ind_{\gamma_r^0}(0) = Ind_{\gamma_r^a}(a)$.

2.c. Montrer que $Ind_{\gamma_r^a}(z) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - a| < r$.

2.d. Montrer que pour $N \in \mathbb{N} \subset \mathbb{C}$, la limite $\lim_{N\to\infty} Ind_{\gamma_r^a}(N)$ est nulle. En déduire que $Ind_{\gamma_r^a}(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - a| > r$.

2.e. Déduire de ce qui précède que, pour $P(z) \in \mathbb{C}[z]$, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r^a} \frac{P'(z)}{P(z)}dz$$

est égale au nombre de racines de P (comptées avec leur multiplicités) contenues dans le disque ouvert de centre a et de rayon r (sous l'hypothèse que son bord ne contient aucune racine de P).

3. Une fraction rationnelle. On considère la fraction $f(z) = \frac{(2+i)z^2-2z+i}{z^3-z^2+z-1}$.

3.a. Ecrire le dénominateur de $f(z)$ sous forme $(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3)$. En déduire que $f(z) = \frac{\beta_1}{z-\alpha_1} + \frac{\beta_2}{z-\alpha_2} + \frac{\beta_3}{z-\alpha_3}$ pour $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, 3$.

3.b. Calculer les intégrales

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r^0} f(z)dz \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r^{-1}} f(z)dz$$

en fonction de $r \in \mathbb{R}_*^+$.