Feuille d'exercices n^{o}4

Séries entières.

1. La règle d'Alembert. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes, et supposons que la suite $(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|})_{n\geq 0}$ soit majorée par une constante K.

1.a. Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ possède un rayon de convergence $\geq \frac{1}{K}$.

1.b. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{n^n} z^n$.

2.a. Rappeler les séries entières définissant e^z, $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\mathrm{sh}(z)$, $\mathrm{ch}(z)$.

2.b. Déterminer module et argument de e^z.

2.c. Montrer que pour $y \in \mathbb{R}$, $\sin(iy) = i\mathrm{sh}(y)$ et $\cos(iy) = \mathrm{ch}(y)$. En déduire parties réelles et imaginaires de $\cos(z)$ et de $\sin(z)$.

2.d. Montrer que $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$. En déduire parties réelle et imaginaire de e^{iz}.

3.a. Développer en série entière la fraction rationnelle $\frac{1}{z^2-(3+i)z+2(1+i)}$. Quel est son rayon de convergence ?

3.b. Mêmes questions pour $\frac{1}{z^2-2z+2}$.

3.c. Déterminer pour $z_0 \in \mathbb{C}^*$, le développement de Taylor de $\frac{1}{z}$ en z_0, ainsi que son rayon de convergence.

4.a. Déterminer les racines des séries entières $\sin(z)$ et $\cos(z)$.

4.b. En déduire le domaine de définition des fonctions $\tan(z)$ et $\mathrm{cotan}(z)$.

4.c. Montrer que $\tan(z+\frac{\pi}{2}) = -\mathrm{cotan}(z)$ et $\mathrm{cotan}(z+\frac{\pi}{2}) = -\tan(z)$.

4.d. Montrer que les fonctions $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$ et $g(z) = z\,\mathrm{cotan}(z)$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$. Déterminer les rayons de convergence de leur développement de Taylor à l'origine. Calculer $f(2iz) - g(z)$.

5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soit $U_\theta = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_- e^{i\theta}$.

5.a. Montrer que l'exponentielle complexe e^z restreinte à la bande $B_\theta = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \theta - \pi < Im(z) < \theta + \pi\}$ est injective d'image U_θ. En déduire que la fonction réciproque $\ln_\theta : U_\theta \to B_\theta$ est holomorphe, et admet comme dérivée $\frac{1}{z}$.

5.b. Comparer les fonctions $\ln_\theta$ et $\ln_{\theta'}$ sur $U_\theta \cap U_{\theta'}$.

5.c. Déterminer le développement de Taylor de $\ln_0$ en $z_0 \in U_0$ et déterminer son rayon de convergence. Montrer que $\ln_0(z) = \ln(|z|) + i\arg(z)$ pour une détermination convenable de $\arg(z)$.

5.d. Montrer que la série entière $\sum_{n>0} \frac{z^n}{n}$ admet un prolongement analytique à $1 + U_\pi$ qu'on exprimera à l'aide du logarithme principal $\ln_0$.