Feuille d'exercices n^{o}5

FONCTIONS ANALYTIQUES ET PRINCIPE DU MAXIMUM.

1.a. Exprimer la fonction $\tan(z)$ à l'aide de l'exponentielle complexe.

1.b. Montrer que la fonction restreinte $\tan|_{\{z\in\mathbb{C}\,|\,-\frac{\pi}{2}<Re(z)<\frac{\pi}{2}\}}$ est injective. Déterminer son image V. En déduire que la fonction réciproque $\arctan(z)$ est analytique sur V. Exprimer $\arctan(z)$ à l'aide du logarithme principal $\ln_0$.

1.c. Déterminer le développement de Taylor à l'origine de la dérivée de $\arctan(z)$. En déduire le développement de Taylor de $\arctan(z)$.

2.a. Montrer que la fonction $f(z) = \frac{1}{2i}\ln_0\frac{z-i}{z+i}$ est analytique sur $\mathbb{C}\backslash[-i,i]$.

2.b. Comparer $f(z)$ et $\arctan(z)$ sur chacun des demi-plans $\{z\in\mathbb{C}\,|\,Re(z)>0\}$ et $\{z\in\mathbb{C}\,|\,Re(z)<0\}$.

3. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et supposons $\bar{D}_R(z_0)\subset U$. Montrer que si une fonction holomorphe $f:U\to\mathbb{C}$ vérifie $|f(z)|\leq M$ pour $z\in\partial D_R(z_0)$, alors $|f(z)|\leq M$ pour $z\in\bar{D}_R(z_0)$.

4. Soit $f:D_1(0)\to D_1(0)$ une fonction holomorphe préservant l'origine.

4.a. Montrer que $\frac{f(z)}{z}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $D_1(0)$.

4.b. En appliquant le principe du module maximum à $z\mapsto\frac{f(z)}{z}$, montrer que $|f(z)|\leq|z|$ pour tout $z\in D_1(0)$.

4.c. Montrer que si de plus il existe $z\in D_1(0)-\{0\}$ tel que $|f(z)|=|z|$ alors f est une rotation.

4.d. En déduire que les seuls automorphismes (i.e. fonctions holomorphes bijectives) du disque-unité qui préservent l'origine sont les rotations.

4.e. Soit $z_0\in D_1(0)$. Montrer que $z\mapsto\frac{z+z_0}{1-\bar{z}_0z}$ définit un automorphisme du disque-unité. En déduire la forme générale d'un automorphisme du disque-unité.

4.f. Montrer que $|f'(0)|\leq 1$ avec égalité si et seulement si f est une rotation.

4.g. On ne suppose plus à présent que f préserve l'origine. Montrer que pour tout $z\in D_1(0)$ on a $|f'(z)|\leq\frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$ avec égalité en un point si et seulement s'il existe $z_0\in D_1(0)$ tel que $f(z)=\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0^2}$.

5. Soit f une fonction harmonique non constante sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que f vérifie le principe du maximum, i.e. que $|f|$ ne possède pas de maximum local.