

Mémoire d'habilitation à diriger des recherches  
en mathématiques

**Sur la dynamique de NLS :  
régimes en onde longue et ondes progressives.**

*présenté par*

DAVID CHIRON

*et soutenue publiquement le 2 décembre 2011,*

après avis de :

MME. SYLVIE BENZONI-GAVAGE	(Université Lyon I)
MR. DAVID LANNES	(DMA, ENS Ulm)
MR. PETER STERNBERG	(Indiana University)

et devant le jury composé de :

MR. FABRICE BÉTHUEL	(Université Paris VI)
MR. YANN BRENIER	(Université de Nice-Sophia Antipolis)
MR. BORIS BUFFONI	(EPFL, Lausanne)
MR. PATRICK GÉRARD	(Université Paris-Sud Orsay XI)
MR. DAVID LANNES	(DMA, ENS Ulm)
MR. GILLES LEBEAU	(Université de Nice-Sophia Antipolis)
MR. JEAN-CLAUDE SAUT	(Université Paris-Sud Orsay XI)



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Trois régimes en ondes longues pour l'équation de Schrödinger non linéaire</b>	<b>7</b>
1.1	Régime Euler . . . . .	8
1.1.1	L'approche de E. Grenier . . . . .	9
1.1.2	La fonctionnelle d'énergie modulée . . . . .	11
1.1.3	Notre approche : linéarisation autour d'une solution approchée . . . . .	13
1.2	Régime onde linéaire . . . . .	16
1.3	Régime (KdV)/(KP-I) . . . . .	18
1.3.1	Le cas intégrable de (GP) en dimension 1 . . . . .	20
1.3.2	Régime (KdV) dans l'espace d'énergie . . . . .	21
1.3.3	Régime (KdV)/(KP-I) dans des normes régulières . . . . .	23
1.4	Perspectives et travaux en cours . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Ondes progressives</b>	<b>29</b>
2.1	Résultats d'existence par minimisation sous contrainte . . . . .	31
2.2	Limite transsonique en dimensions 2 et 3 ( $\Gamma \neq \mathbf{0}$ ) . . . . .	36
2.2.1	Caractérisations variationnelles des "ground states" de (KP-I) . . . . .	36
2.2.2	Convergence vers un "ground state" de (KP-I) . . . . .	38
2.3	Ondes progressives pour une nonlinéarité générale en 1d . . . . .	42
2.3.1	Etude d'exemples . . . . .	44
2.3.2	Résultats mathématiques . . . . .	50
2.4	Perspectives et travaux en cours . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Interaction de trains d'ondes</b>	<b>61</b>
3.1	Le système d'interaction à trois ondes . . . . .	61
3.1.1	Résultats de stabilité/instabilité par scattering inverse pour le problème linéarisé . . . . .	63
3.1.2	Résultats de stabilité/instabilité dans des espaces de Sobolev pour le problème linéarisé . . . . .	64
3.2	Travail en cours : l'approximation de Schrödinger pour les trains d'ondes . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Perspectives de travail</b>	<b>71</b>
4.1	Questions ouvertes sur la dynamique de (NLS) . . . . .	71
4.2	Questions ouvertes sur l'approximation de Schrödinger pour les trains d'onde . . . . .	75

## Cadre et motivation pour les chapitres 1 et 2

On considère l'équation de Schrödinger Non Linéaire dans  $\mathbb{R}^d$

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \Delta\Psi = \Psi f(|\Psi|^2), \quad (\text{NLS})$$

où  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  est une nonlinéarité que l'on prendra relativement générale. Cette équation intervient dans de très nombreux modèles physiques : dans la théorie de Bose-Einstein pour les condensats ou la superfluidité (*cf.* [52], [82], [87], [95], [94] ainsi que les articles de revue [145], [25], [1]) ou l'optique non linéaire (*cf.* [102], [103]), comme approximation du système de Maxwell-Bloch. Pour l'optique non linéaire,  $\Psi$  est l'enveloppe du champ électrique. Pour les condensats ou la superfluidité,  $|\Psi|^2$  représente la densité de superfluide ou de condensat, et le gradient de la phase est le champ de vitesse.

La nonlinéarité  $f$  peut-être prise égale à  $f(\varrho) = \pm\varrho$  pour l'équation de Schrödinger cubique, ou plus généralement une fonction puissance  $f(\varrho) = \pm\varrho^\sigma$ . Dans la théorie des condensats,  $f(\varrho) = \varrho - 1$  donne lieu à la célèbre équation de Gross-Pitaevskii

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \Delta\Psi = \Psi(|\Psi|^2 - 1), \quad (\text{GP})$$

mais le modèle avec  $f(\varrho) = \varrho^2$  est aussi utilisé (voir, *e.g.*, [109]). En optique non linéaire,  $f(\varrho)$  représente la réponse du matériau à une intensité  $\varrho$ , et peut donc être plus compliquée que la nonlinéarité Kerr  $f(\varrho) = \varrho$  (*cf.* [102]) :

$$f(\varrho) = \alpha\varrho^\nu + \beta\varrho^{2\nu}, \quad \text{ou} \quad f(\varrho) = \alpha\varrho\left(1 + \gamma \tanh\left(\frac{\varrho^2 - \varrho_0^2}{\sigma^2}\right)\right)$$

pour un matériau avec des réponses qualitativement différentes pour  $\varrho$  petit ou  $\varrho$  grand, ou encore

$$f(\varrho) = \alpha\left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^\nu}\right), \quad \text{ou} \quad f(\varrho) = 1 - \exp\left(\frac{1 - \varrho}{\varrho_0}\right)$$

pour un paramètre  $\varrho_0 > 0$ , lorsque l'on tient compte de phénomènes de saturation. La nonlinéarité cubique-quintique [11] est aussi d'usage fréquent, elle s'écrit

$$f(\varrho) = \alpha_1 - \alpha_3\varrho + \alpha_5\varrho^2,$$

avec  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$  et  $\alpha_5$  strictement positifs et tels que  $f$  possède deux racines réelles strictement positives.

Lorsque ces modèles sont utilisés pour la condensation ou l'optique non linéaire, la condition à l'infini naturelle est

$$|\Psi(t, x)| \rightarrow r_0 \quad |x| \rightarrow +\infty,$$

où  $r_0 > 0$  est tel que  $f(r_0^2) = 0$ . Le cas  $r_0 = 0$  est aussi important. Dans la suite, lorsque  $r_0 > 0$ , on peut normaliser  $r_0 = 1$  sans perdre en généralité. Si le cas Gross-Pitaevskii a été déjà très étudié, tant dans la littérature physique que mathématique, les exemples précédents soulignent l'importance de prendre en compte une nonlinéarité  $f$  générale. Cette condition non nulle à l'infini rend la dynamique de (NLS) en un sens beaucoup plus riche que lorsque  $r_0 = 0$ , où c'est essentiellement le scattering qui gouverne la dynamique en temps long. Par opposition, lorsque  $r_0 > 0$ , il est possible de trouver divers régimes dynamiques en onde longue, qui sont envisagés dans le premier chapitre. Ces régimes se voient sur l'écriture de (NLS) sous forme d'un système hydrodynamique via la transformation de Madelung, c'est-à-dire l'écriture de la fonction d'onde  $\Psi$  en coordonnées polaires  $\Psi = Ae^{i\phi}$ . On obtient ainsi un système proche du système d'Euler compressible. Le premier de ces régimes est le régime Euler ou WKB, le second est le régime onde linéaire, et le troisième le régime Korteweg-de Vries/Kadomtsev-Petviashvili. Si le premier apparaît même si  $r_0 = 0$ , les deux autres sont spécifiques au cas d'une donnée non nulle à l'infini. En particulier, le régime onde linéaire met en évidence la vitesse du son qui jouera un rôle prépondérant. On passe d'un régime au suivant en considérant des données petites (en un sens que l'on précisera) et en travaillant sur des temps plus longs. L'autre aspect participant à la richesse de la dynamique de (NLS) avec donnée non nulle à l'infini concerne l'existence d'ondes progressives. Ce sont des profils localisés en espace (au sens où leur module tend vers  $r_0$  à l'infini) et se déplaçant à vitesse constante. Lorsque  $r_0 = 0$ , l'équation (NLS) ne possède, en général, pas d'onde solitaire, sauf peut-être des ondes stationnaires (type soliton). En revanche, il est attendu que (NLS) avec donnée non nulle à l'infini possède des ondes solitaires pour

les vitesses subsoniques, où la vitesse du son est liée au régime onde linéaire précédemment mentionné. Le second chapitre est consacré à l'étude de ces objets localisés, et plus précisément à des résultats d'existence et de stabilité pour ces ondes progressives, *via* des méthodes variationnelles. En outre, lorsque la vitesse de l'onde s'approche de la vitesse du son et la dimension  $d$  est inférieure à trois, les ondes progressives sont asymptotiquement décrites par les ondes progressives de Korteweg-de Vries/Kadomtsev-Petviashvili. Nous établissons rigoureusement ce lien. Enfin, nous menons une étude en dimension un en exhibant des comportements qualitatifs très variés bien que, qualitativement, la nonlinéarité "ressemble" à la nonlinéarité usuelle de Gross-Pitaevskii.

Le flot de Schrödinger préserve, au moins formellement, l'énergie de Ginzburg-Landau

$$E(\psi) \equiv \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\psi|^2 + F(|\psi|^2) dx,$$

où  $F$  est la primitive de  $f$  nulle en  $r_0^2$ , *i.e.*  $F(\varrho) \equiv \int_{r_0^2}^{\varrho} f(\rho) d\rho$ . Elle contient un terme d'énergie cinétique et un terme d'énergie potentielle. Une autre quantité conservée joue un rôle fondamental, c'est le moment  $\vec{\mathcal{P}}$ . Lorsque la condition à l'infini est nulle, une définition naturelle est

$$\vec{\mathcal{P}}(\psi) \equiv \int_{\mathbb{R}^d} \langle i\psi, \nabla\psi \rangle dx,$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire sur  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ . Cette quantité a bien un sens dans  $H^1(\mathbb{R}^d)$ . En revanche, lorsque la condition à l'infini n'est pas nulle, cette intégrale n'a plus de sens. Une définition naturelle est donnée dans [95] :

$$\vec{\mathcal{P}}(\psi) \equiv \int_{\mathbb{R}^d} \langle i(\psi - r_0), \nabla\psi \rangle dx,$$

mais requiert  $\psi - r_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$  par exemple. Une difficulté essentielle est de trouver une définition correcte du moment, dans un cadre fonctionnel adapté à la résolution du problème de Cauchy, et donnant effectivement une quantité conservée.

C'est l'occasion de mentionner les résultats suivants pour le problème de Cauchy lorsque la donnée à l'infini n'est pas nulle. Tout d'abord, lorsque  $d = 2$  ou  $d = 3$ , l'article de F. Béthuel et J.-C. Saut [37] prouve le caractère globalement bien posé dans  $1 + H^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$  pour (GP), où  $r_0 = 1$ , avec conservation de l'énergie et du moment défini par

$$\vec{\mathcal{P}}(\psi) \equiv \int_{\mathbb{R}^d} \langle i(\psi - 1), \nabla\psi \rangle dx,$$

Malheureusement, si  $d = 2$ , étant donnée la décroissance algébrique des solutions (*cf.* chapitre 2), il apparaît que les ondes progressives n'appartiennent pas à  $1 + L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ . Par ailleurs, le travail de P. Zhidkov [164] montre, quand  $d = 1$ , le caractère bien posé de (NLS) avec donnée non nulle à l'infini localement dans les espaces de Zhidkov ( $\sigma \in \mathbb{N}^*$ )

$$\mathcal{Z}^\sigma(\mathbb{R}) \equiv \{v \in L^\infty(\mathbb{R}), \partial_x v \in H^{\sigma-1}(\mathbb{R})\}.$$

Dans la même veine, [63] étend ces résultats en dimension supérieure. De plus, lorsque  $d = 1$ , les travaux [64], [66] et [32] montrent que (NLS) est en fait globalement bien posée dans les espaces  $\mathcal{Z}^\sigma$  pour  $\sigma \in \mathbb{N}^*$ . Dans [66], P. Gérard résout le problème de Cauchy pour (GP) dans l'espace d'énergie

$$\{u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}), \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^d), |u|^2 - 1 \in L^2(\mathbb{R}^d)\},$$

muni de la distance naturelle, pour  $d = 2$  et  $d = 3$ , globalement en temps (voir aussi [65]). Le cas de la dimension  $d = 4$  est critique pour (GP) et [66] prouve un résultat d'existence et unicité globale pour des données initiales ayant une petite énergie.

Dans le troisième chapitre, on étudie le système d'interaction à trois ondes. Celui-ci intervient dans l'étude de paquets d'ondes en résonance dans une équation dispersive. Plus précisément, ce sont les propriétés de stabilité/instabilité sur le problème linéarisé que nous avons voulu mettre en évidence, en vue de l'application à plus long terme à la justification de l'équation de Schrödinger pour la modulation des trains d'ondes dans une équation dispersive.

## Travaux depuis la fin de la thèse :

- [A<sub>8</sub>] D. CHIRON,  
Travelling waves for the Nonlinear Schrödinger Equation with general nonlinearity in dimension one.  
*Prépublication, soumis à Nonlinearity.*
- [A<sub>7</sub>] D. CHIRON ET M. MARIŞ,  
Rarefaction pulses for the Nonlinear Schrödinger Equation in the transonic limit.  
*Prépublication, soumis à Comm. Math. Phys.*
- [A<sub>6</sub>] D. CHIRON ET M. MARIŞ,  
Traveling waves for Nonlinear Schrödinger Equation with nonzero condition at infinity. II.  
*Prépublication.*
- [A<sub>5</sub>] D. CHIRON,  
Semigroup estimates and stability/instability results for the linearized three waves interaction equations.  
*A paraître dans Rev. Mat. Complut. (2011).*
- [A<sub>4</sub>] D. CHIRON ET F. ROUSSET,  
The KdV/KP-I limit of the Nonlinear Schrödinger Equation.  
*SIAM J. Math. Anal.* **42**, no. 1 (2010), 64-96.
- [A<sub>3</sub>] D. CHIRON,  
Three long wave asymptotic regimes for the nonlinear Schrödinger equation.  
*Singularities in nonlinear evolution phenomena and applications, 107-138, CRM Series, 9, Ed. Norm., Pisa, (2009).*
- [A<sub>2</sub>] D. CHIRON ET F. ROUSSET,  
Geometric optics and boundary layers for nonlinear-Schrödinger equations.  
*Comm. Math. Phys.* **288**, no. 2, (2009), 503-546.
- [A<sub>1</sub>] D. CHIRON,  
On the definitions of Sobolev and BV spaces into metric spaces and the trace problem.  
*Commun. Contemp. Math., Vol. 7, no. 4, 473-513 (2007).*

## Travaux issus de la thèse :

- [Ab<sub>4</sub>] F. BÉTHUEL ET D. CHIRON,  
Some questions related to the lifting problem in Sobolev spaces.  
*Perspectives in Nonlinear Partial Differential Equations, H. Berestycki & al. Editors, Contemporary Mathematics, Volume 446 (en l'honneur des 60 ans de Haïm Brézis), p. 125-152 (2007).*
- [Ab<sub>3</sub>] D. CHIRON,  
Vortex helices for the Gross-Pitaevskii equation.  
*J. Math. Pures Appl.* **84**, 1555-1647 (2005).
- [Ab<sub>2</sub>] D. CHIRON,  
Boundary problems for the Ginzburg-Landau equation.  
*Commun. Contemp. Math.* **7**, no. 5, 597-648 (2005).
- [Ab<sub>1</sub>] D. CHIRON,  
Travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation in dimension larger than two.  
*Nonlinear Anal., Theory, Methods, Appl.* **58**, no. 1-2, 175-204 (2004).

# Chapitre 1

## Trois régimes en ondes longues pour l'équation de Schrödinger non linéaire

*Ce chapitre est une adaptation et ré-actualisation de l'article de revue :*

[A<sub>3</sub>] D. CHIRON,  
Three long wave asymptotic regimes for the nonlinear Schrödinger equation.  
*Singularities in nonlinear evolution phenomena and applications, 107-138, CRM Series, 9, Ed. Norm., Pisa, (2009).*

*Les articles associés sont des travaux en collaboration avec Frédéric Rousset :*

[A<sub>2</sub>] D. CHIRON ET F. ROUSSET,  
Geometric optics and boundary layers for nonlinear-Schrödinger equations.  
*Comm. Math. Phys.* **288**, no. 2, (2009), 503-546.

[A<sub>4</sub>] D. CHIRON ET F. ROUSSET,  
The KdV/KP-I limit of the Nonlinear Schrödinger Equation.  
*SIAM J. Math. Anal.* **42**, no. 1 (2010), 64-96.

\*\*\*\*\*

La forme hydrodynamique de

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Delta \Psi = \Psi f(|\Psi|^2) \quad (\text{NLS})$$

est classiquement obtenue à l'aide de la transformation de Madelung, valable au moins lorsque  $\Psi$  ne s'annule pas, qui consiste à écrire  $\Psi$  en coordonnées polaires

$$\Psi = A \exp(i\phi).$$

Avec  $\Psi$  sous cette forme dans (NLS), après simplification du facteur de phase et séparation des parties réelle et imaginaire, on obtient le système

$$\begin{cases} \partial_t A + 2\nabla\phi \cdot \nabla A + A\Delta\phi = 0 \\ \partial_t \phi + |\nabla\phi|^2 + f(A^2) - \frac{\Delta A}{A} = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Avec

$$\varrho \equiv A^2, \quad v \equiv \nabla\phi,$$

le système précédent (1.1) devient

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + 2\nabla \cdot (\varrho v) = 0 \\ \partial_t v + 2(v \cdot \nabla)v + \nabla(f(\varrho)) = \nabla\left(\frac{\Delta\sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}}\right), \end{cases} \quad (1.2)$$

qui est un système d'Euler compressible possédant un terme supplémentaire, appelé pression quantique. La transformation de Madelung n'est pas valable lorsque  $\Psi$  a des vortex, ou plus généralement lorsque  $\Psi$  s'annule, ce qui fait exploser le terme de pression quantique. Le moment  $\vec{\mathcal{P}}$  s'écrit dans ce cadre

$$\vec{\mathcal{P}} = \int_{\mathbb{R}^d} \varrho v \, dx$$

lorsque  $\Psi$  tend vers 0 à l'infini, et si  $|\Psi| \rightarrow r_0$ , ce sera plutôt

$$\vec{\mathcal{P}} = \int_{\mathbb{R}^d} (\varrho - r_0^2)v \, dx.$$

Ces deux expressions sont bien sûr formellement équivalentes via le fait que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla h \, dx = 0$$

pour toute fonction  $h$  tendant vers 0 à l'infini de manière appropriée.

L'équation (NLS) est dite défocalisante lorsque  $f$  est (strictement) croissante, ce qui signifie que, lorsque l'on a supprimé la pression quantique, le système d'Euler (1.2) est hyperbolique. Dans le cas où  $f$  est (strictement) décroissante, (NLS) est dite focalisante et le système d'Euler a des zones elliptiques en  $(t, x)$ . Le cas de l'équation de Gross-Pitaevskii (GP) est défocalisant. Toutefois, pour une nonlinéarité générale, comme par exemple la nonlinéarité cubique-quintique, il existe une région défocalisante pour  $\varrho$  grand, et une région focalisante pour  $\varrho$  petit.

À l'aide de cette forme hydrodynamique (1.2) de (NLS), nous allons envisager trois régimes asymptotiques en onde longue : le régime Euler, le régime onde linéaire, et enfin le régime Korteweg-de Vries/Kadomtsev-Petviashvili.

## 1.1 Régime Euler

Le régime Euler est obtenu en considérant une donnée initiale WKB à phase très oscillante

$$\Psi_\varepsilon^{\text{in}}(x) = \psi_\varepsilon^{\text{in}}(\varepsilon x) = \sqrt{\rho_\varepsilon^{\text{in}}(\varepsilon x)} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \varphi_\varepsilon^{\text{in}}(\varepsilon x)\right), \quad (1.3)$$

ce qui correspond pour (1.2) à une donnée initiale

$$\begin{cases} \varrho_\varepsilon^{\text{in}}(x) &= \rho_\varepsilon^{\text{in}}(\varepsilon x) \\ v_\varepsilon^{\text{in}}(x) &= (\nabla \varphi_\varepsilon^{\text{in}})(\varepsilon x) = u_\varepsilon^{\text{in}}(\varepsilon x). \end{cases}$$

Ici,  $\varepsilon > 0$  est un petit paramètre, homogène à l'inverse d'une longueur, ce qui fait bien apparaître cette asymptotique comme un régime en onde longue, de longueur d'onde  $\varepsilon^{-1}$ . Ceci est le régime semi-classique, puisque

$$\psi_\varepsilon(\tau, z) \equiv \Psi_\varepsilon(t, x), \quad t = \frac{\tau}{\varepsilon}, \quad x = \frac{z}{\varepsilon}$$

est alors solution de

$$i\varepsilon \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial \tau} + \varepsilon^2 \Delta_z \psi_\varepsilon = \psi_\varepsilon f(|\psi_\varepsilon|^2). \quad (\text{NLS}_\varepsilon)$$

De manière équivalente, avec

$$\rho_\varepsilon(\tau, z) \equiv \varrho_\varepsilon(t, x) \quad u_\varepsilon(\tau, z) \equiv v_\varepsilon(t, x), \quad z = \varepsilon x, \quad \tau = \varepsilon t,$$



le système (1.2) devient

$$\begin{cases} \partial_\tau \rho_\varepsilon + 2\nabla_z \cdot (\rho_\varepsilon u_\varepsilon) = 0 \\ \partial_\tau u_\varepsilon + 2(u_\varepsilon \cdot \nabla_z)u_\varepsilon + \nabla_z(f(\rho_\varepsilon)) = \varepsilon^2 \nabla_z \left( \frac{\Delta_z \sqrt{\rho_\varepsilon}}{\sqrt{\rho_\varepsilon}} \right). \end{cases} \quad (1.4)$$

La méthode WKB consiste à chercher la solution  $\Psi_\varepsilon$  de (NLS) sous la même forme

$$\Psi_\varepsilon(t, x) = \psi_\varepsilon(\tau, z) = \sqrt{\rho_\varepsilon(\tau, z)} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\tau, z)\right), \quad \tau = \varepsilon t, \quad z = \varepsilon x.$$

Dans ce régime en onde longue, la pression quantique, comportant le plus de dérivées, est formellement négligeable, et la limite formelle de (1.4) lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  est donc le système d'Euler

$$\begin{cases} \partial_\tau \rho + 2\nabla_z \cdot (\rho u) = 0 \\ \partial_\tau u + 2(u \cdot \nabla_z)u + \nabla_z(f(\rho)) = 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

dès que la donnée initiale converge de façon appropriée. Notons que la convergence est attendue pour des temps  $\tau$  d'ordre un, *i.e.*  $t \simeq \varepsilon^{-1}$ . Les solutions régulières du système d'Euler ne sont pas nécessairement globales, et on notera  $\tau_b$  (appelé *breaking time*) le temps d'explosion comme solution régulière (dû aux chocs).

La justification de la convergence de (1.4) vers (1.5) a été menée dans de nombreux travaux ces vingt dernières années. L'un des premiers travaux est celui de P. Gérard [67], dans le cas de données analytiques, avec un développement de l'amplitude en série entière en  $\varepsilon$ . L'approche vaut pour une nonlinéarité analytique, mais sans condition sur le signe de  $f'$  (et vaut donc dans le cas focalisant comme dans le cas défocalisant). Pour  $d = 1$  et dans les cas intégrables de (NLS),  $f(\rho) = \pm \rho$  (*i.e.* (NLS) cubique), et  $f(\rho) = \rho - 1$ , les travaux de S. Jin, C. Levermore et D. McLaughlin ([92]) et N. Ercolani, S. Jin, C. Levermore et W. MacEvoy [61] la méthode de scattering inverse fournit des résultats, y compris après le temps  $\tau_b$  pour les cas défocalisants, car l'analyse vaut alors sur tout intervalle  $0 \leq \tau = \varepsilon t \leq \tau_0$  borné en  $\tau$ . En revanche, du fait de l'utilisation du scattering inverse, les espaces fonctionnels en jeu ne sont jamais très clairs. Par opposition, les résultats présentés ci-dessous sont valables dans le cas défocalisant et sur un intervalle de temps  $0 \leq \tau = \varepsilon t \leq \tau_*$  avec  $\tau_* > 0$  indépendant de  $\varepsilon$  mais  $\tau_* < \tau_b$ .

### 1.1.1 L'approche de E. Grenier

Dans le cadre de régularité Sobolev et pour une nonlinéarité défocalisante  $f' > 0$  sur  $\mathbb{R}_+$ , E. Grenier dans [75] utilise une transformation de Madelung

$$\Psi_\varepsilon(t, x) = A_\varepsilon(\tau, z) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \Theta_\varepsilon(\tau, z)\right), \quad \tau = \varepsilon t, \quad z = \varepsilon x$$

où il autorise "l'amplitude"  $A_\varepsilon$  à être complexe. On part en effet de l'égalité

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Delta \Psi - \Psi f(|\Psi|^2) &= -A_\varepsilon \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \Theta_\varepsilon(\tau, z)\right) \left\{ \frac{\partial \Theta_\varepsilon}{\partial \tau} + |\nabla_z \Theta_\varepsilon|^2 + f(|A_\varepsilon|^2) \right\} + \varepsilon^2 \Delta_z A_\varepsilon \\ &\quad + i \varepsilon \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \Theta_\varepsilon(\tau, z)\right) \left\{ \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial \tau} + 2\nabla_z \Theta_\varepsilon \cdot \nabla_z A_\varepsilon + A_\varepsilon \Delta_z \Theta_\varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

Lorsque  $A_\varepsilon$  est réel, la séparation des parties réelle et imaginaire donne le système (1.4) de type Euler usuel. En revanche, si  $A_\varepsilon$  est complexe, et *si* l'on résout

$$\begin{cases} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial \tau} + 2\nabla_z \Theta_\varepsilon \cdot \nabla_z A_\varepsilon + A_\varepsilon \Delta_z \Theta_\varepsilon = i \varepsilon \Delta_z A_\varepsilon \\ \frac{\partial \Theta_\varepsilon}{\partial \tau} + |\nabla_z \Theta_\varepsilon|^2 + f(|A_\varepsilon|^2) = 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

alors la fonction

$$\Psi_\varepsilon(t, x) = A_\varepsilon(\tau, z) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \Theta_\varepsilon(\tau, z)\right), \quad \tau = \varepsilon t, \quad z = \varepsilon x$$

est une solution de (NLS). L'avantage essentiel de travailler avec le nouveau système (1.6) est que sa structure est beaucoup plus simple que (1.4). En effet, le terme de pression quantique apparaît maintenant comme un terme linéaire où il n'y a plus de problème d'annulation de  $\Psi_\varepsilon$  et (1.6) possède la structure d'un système hyperbolique symétrisable dès que l'on écrit le système en variables  $(A_\varepsilon, u_\varepsilon \equiv \nabla_z \Theta_\varepsilon)$  :

$$\begin{cases} \partial_\tau A_\varepsilon + 2u_\varepsilon \cdot \nabla_z A_\varepsilon + A_\varepsilon \nabla_z \cdot u_\varepsilon = i\varepsilon \Delta_z A_\varepsilon \\ \partial_\tau u_\varepsilon + (u_\varepsilon \cdot \nabla_z) u_\varepsilon + \nabla_z (f(|A_\varepsilon|^2)) = 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

avec symétriseur (rappelons que  $f' > 0$  sur  $\mathbb{R}_+$ )

$$S(A) = \text{Diag} \left( Id_{\mathbb{C}}, \frac{1}{2f'(|A|^2)} Id_{\mathbb{R}^d} \right),$$

qui a l'avantage de ne pas affecter le terme de pression quantique à coefficients constants et anti-adjoint. Le principe est donc de résoudre (1.7) comme système hyperbolique symétrisable pour  $0 \leq \tau \leq \tau_0$  avec  $\tau_0 > 0$  indépendant de  $\varepsilon$  dans  $H^s$  avec  $s$  grand, de calculer  $\Theta_\varepsilon$  à l'aide de la seconde équation de (1.6)

$$0 = \frac{\partial \Theta_\varepsilon}{\partial \tau} + |\nabla_z \Theta_\varepsilon|^2 + f(|A_\varepsilon|^2) = \frac{\partial \Theta_\varepsilon}{\partial \tau} + |u_\varepsilon|^2 + f(|A_\varepsilon|^2)$$

(ce qui donne bien  $\nabla_z \Theta_\varepsilon = u_\varepsilon$ ), puis d'observer que  $A_\varepsilon \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \Theta_\varepsilon\right)$  est une solution de (NLS). L'étape du calcul de la phase manquait dans [75] mais a été remarquée dans [3]. Cette approche permet de montrer que pour les données initiales WKB, la solution  $\Psi_\varepsilon$  de (NLS) reste régulière ( $H^\sigma$  avec  $\sigma$  grand) sur  $[0, \tau_0/\varepsilon]$ . En revanche, du fait que l'"amplitude" complexe contient en fait une partie de la phase, la résolution se fait avec perte de dérivées. Cette approche ingénieuse ne permet toutefois pas de traiter le cas  $f' \geq 0$  mais  $f'(0) = 0$ , comme c'est le cas pour  $f(\varrho) = \varrho^2$  (le symétriseur  $S(\varrho) = \text{Diag} \left( Id_{\mathbb{C}}, \frac{1}{2f'(\varrho)} Id_{\mathbb{R}^d} \right)$ , n'est alors plus défini en  $\varrho = 0$ ). Pour terminer, il est fréquent, dans la méthode WKB, de développer en  $\varepsilon$  à un ordre plus élevé la donnée initiale

$$\Psi_\varepsilon^{\text{in}}(x) = \psi_\varepsilon^{\text{in}}(\varepsilon x) = \left( \sum_{j=0}^m \varepsilon^j A_j^{\text{in}}(\varepsilon x) + \mathcal{O}(\varepsilon^{m+1}) \right) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \varphi_\varepsilon^{\text{in}}(\varepsilon x)\right). \quad (1.8)$$

et [75] montre que le développement reste valide pour  $0 \leq t = \varepsilon \tau \leq \tau_0$ , *i.e.*

$$\Psi_\varepsilon(t, x) = \psi_\varepsilon(\tau, z) = \left( \sum_{j=0}^m \varepsilon^j A_j(\tau, z) + \mathcal{O}(\varepsilon^{m+1}) \right) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\tau, z)\right), \quad \tau = \varepsilon t, \quad z = \varepsilon x, \quad (1.9)$$

et que les équations pour les termes  $A_j$ ,  $j \geq 1$ , sont obtenues par annulation successive des termes en  $\varepsilon$  lorsque l'on insère (1.9) dans (1.7). L'approche de E. Grenier ([75]) a été étendue au cas de Schrödinger avec potentiel régulier (en incluant le cas physique du potentiel quadratique) par R. Carles dans [43], à l'équation de Schrödinger modifié par B. Desjardins et C.K. Lin ([59]), au modèle de Schrödinger-Poisson par T. Alazard et R. Carles ([5]). Plus récemment, T. Alazard et R. Carles dans [3] ont étendu les résultats de E. Grenier ([75]) au cas d'une nonlinéarité en fonction puissance  $f(\varrho) = \varrho^\sigma$ , avec toutefois des restrictions sur la puissance  $\sigma$  et la dimension  $d$ . Le système d'Euler (1.5) étant pour notre problème plus agréable en variables  $(a, \varphi)$  plutôt que  $(\rho = a^2, u = \nabla \varphi)$ , il est préférable de le ré-écrire

$$\begin{cases} \partial_\tau a + 2\nabla_z \varphi \cdot \nabla_z a + a \Delta_z \varphi = 0 \\ \partial_\tau \varphi + |\nabla_z \varphi|^2 + f(a^2) = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Le travail de T. Makino, S. Ukai et S. Kawashima [126] propose une symétrisation de systèmes analogues lorsque  $f$  est homogène :  $f(\varrho) = \varrho^\sigma$  pour un  $\sigma \in \mathbb{N}^*$ . Le système (1.10) de données initiales dans  $H^\infty \times H^\infty$  possède alors une unique solution maximale régulière dans  $H^\infty$ . Le résultat essentiel de [3] concernant (NLS) s'écrit :

**Théorème 1** ([3]). *Soit  $1 \leq d \leq 3$ ,  $\sigma \in \mathbb{N}^*$  et considérons la nonlinéarité  $f(\varrho) = \varrho^\sigma$ . Supposons la donnée initiale  $a_\varepsilon^{\text{in}}, \varphi_\varepsilon^{\text{in}} \equiv \varphi^{\text{in}}$  dans  $H^\infty = \bigcap_{s \in \mathbb{N}} H^s$  et telle que, pour une fonction  $a^{\text{in}} \in H^\infty$  et tout entier  $s \geq 0$ ,*

$$\|a_\varepsilon^{\text{in}} - a^{\text{in}}\|_{H^s} = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Soit  $(a, \varphi) \in \mathcal{C}([0, T^*[ , H^\infty \times H^\infty)$ , la solution maximale régulière de (1.10) de donnée initiale  $(a^{\text{in}}, \varphi^{\text{in}})$ , où  $T^* > 0$ . Alors, il existe  $T \in ]0, T^*[$  indépendant de  $0 < \varepsilon < 1$ , tel que la solution de  $(\text{NLS}_\varepsilon)$  avec donnée initiale oscillante (1.3) existe et reste régulière sur  $[0, T]$ , et vérifie l'estimée

$$\sup_{\varepsilon \in (0,1]} \left\| \psi_\varepsilon \exp \left( -\frac{i}{\varepsilon} \varphi \right) \right\|_{L^\infty([0,T], H^s)} < +\infty, \quad (1.11)$$

où

- si  $\sigma = 1$ , alors  $s \in \mathbb{N}$  est arbitraire,
- si  $\sigma = 2$  et  $d = 1$ , on peut prendre  $s = 2$ ,
- si  $\sigma = 2$  et  $2 \leq d \leq 3$ , on peut prendre  $s = 1$ ,
- si  $\sigma \geq 3$  on peut prendre  $s = \sigma$ .

Par suite,

$$|\psi_\varepsilon|^2 \rightarrow a^2 \quad \text{dans } \mathcal{C}([0, T], L^{\sigma+1}(\mathbb{R}^d)) \quad \text{et} \quad \varepsilon \langle i\psi_\varepsilon, \nabla_z \psi_\varepsilon \rangle \rightarrow a^2 u \quad \text{dans } \mathcal{C}([0, T], L^{\sigma+1}(\mathbb{R}^d) + L^1(\mathbb{R}^d)).$$

Ici,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire dans  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ . Le point clé dans [3] est une transformation fine de (NLS) en une perturbation d'un système hyperbolique symétrique quasilineaire avec des coefficients non réguliers si  $\sigma \geq 2$ . Bien que l'hypothèse

$$\|a_\varepsilon^{\text{in}} - a_0\|_{H^\infty} = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

soit naturelle dans le contexte des développements WKB, il est souligné dans [3] que le résultat précédent devient faux avec la simple condition  $\|a_\varepsilon^{\text{in}} - a_0\|_{H^\infty} = o(1)$ , ou même  $\mathcal{O}(\varepsilon^\alpha)$  pour un  $0 < \alpha < 1$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , car la solution peut développer des oscillations dans la phase de taille  $\varepsilon^{\alpha-1}$ .

### 1.1.2 La fonctionnelle d'énergie modulée

Une autre approche pour prouver la convergence de (NLS) vers Euler dans la limite semi-classique est proposée par Y. Brenier (en fait, il s'agissait du modèle de Vlasov-Poisson au lieu de (NLS)) dans [41], en s'inspirant d'un travail de P.-L. Lions ([123]). Dans le régime semi-classique, l'Hamiltonien de

$$i\varepsilon \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial \tau} + \varepsilon^2 \Delta_z \psi_\varepsilon = \psi_\varepsilon f(|\psi_\varepsilon|^2). \quad (\text{NLS}_\varepsilon)$$

est, rappelons-le, l'énergie

$$E^\varepsilon(\psi) = \int_{\mathbb{R}^d} |\varepsilon \nabla_z \psi|^2 + F(|\psi|^2) dz,$$

(quand elle est bien définie). L'idée est alors d'introduire une *fonctionnelle d'énergie modulée* en vue de comparer  $\Psi_\varepsilon$  et la solution régulière du système (1.10) d'Euler écrit en variable  $(a, \varphi)$ , qui s'écrit avec  $u \equiv \nabla_z \varphi$

$$\mathcal{H}^\varepsilon(\psi) \equiv \int_{\mathbb{R}^d} |\varepsilon \nabla_z \psi - iu \psi|^2 + (|\psi|^2 - a^2)^2 dz,$$

dans le cas Gross-Pitaevskii, et plus généralement

$$\mathcal{H}^\varepsilon(\psi) = \int_{\mathbb{R}^d} |\varepsilon \nabla_z \psi - iu \psi|^2 + \left[ F(|\psi|^2) - F(a^2) - F'(a^2)(|\psi|^2 - a^2) \right] dz,$$

pour une nonlinéarité régulière  $f$  telle que  $f' > 0$  sur  $[0, +\infty[$ , de sorte que  $F$  est strictement convexe.

Cette approche a été utilisée par F.-H. Lin et P. Zhang dans [120] pour l'équation (GP) ((NLS) avec  $f(\varrho) = \varrho - 1$ ) posée dans un domaine extérieur (le complémentaire de l'obstacle) dans  $\mathbb{R}^2$  avec bord régulier. Ils prennent les conditions à l'infini

$$\psi_\varepsilon(\tau, z) \sim \exp \left( -i\tau \frac{|u^\infty|^2}{2\varepsilon} + i \frac{u^\infty \cdot z}{\varepsilon} \right), \quad |z| \rightarrow +\infty, \quad (1.12)$$

ou encore, en version hydrodynamique,

$$\rho_\varepsilon(\tau, z) = |\psi_\varepsilon(\tau, z)|^2 \rightarrow 1, \quad u_\varepsilon(\tau, z) \rightarrow u^\infty, \quad |z| \rightarrow +\infty, \quad (1.13)$$

où  $u^\infty \in \mathbb{R}^d$  est un vecteur constant. Cette condition est naturelle quand on étudie un obstacle en mouvement dans le superfluide. En effet, en partant de  $(\text{NLS}_\varepsilon)$  avec la condition de Neumann homogène sur le bord de l'obstacle se déplaçant à vitesse constante  $-u^\infty$  dans un fluide au repos à l'infini. En utilisant l'invariance Galiléenne de  $(\text{NLS}_\varepsilon)$ , on peut ré-écrire  $(\text{NLS}_\varepsilon)$  dans un référentiel suivant l'obstacle, mais avec la condition à l'infini (1.12). Le résultat essentiel de [120] s'écrit :

**Théorème 2** ([120]). *Soit  $d = 2$  et  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \omega$  un domaine extérieur. On suppose que la donnée initiale satisfait*

$$\sqrt{\rho_\varepsilon^{\text{in}}} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \varphi_\varepsilon^{\text{in}}\right) - \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} u^\infty \cdot z\right), \quad \rho^{\text{in}} - 1, \quad u^{\text{in}} - u^\infty \in H^3(\Omega), \quad \rho^{\text{in}} \geq \frac{1}{2},$$

$$\sup_{0 < \varepsilon < 1} \left\{ \|\nabla_z \sqrt{\rho_\varepsilon^{\text{in}}}\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \varphi_\varepsilon^{\text{in}}\right) - \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} u^\infty \cdot z\right) \right\|_{L^2(\Omega)} + \|\sqrt{\rho_\varepsilon^{\text{in}}} \nabla_z \varphi_\varepsilon^{\text{in}}\|_{L^2(\Omega)} \right\} < +\infty$$

$$\rho_\varepsilon^{\text{in}} - \rho^{\text{in}} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{\rho_\varepsilon^{\text{in}}} (\nabla_z \varphi_\varepsilon^{\text{in}} - u^{\text{in}}) \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \quad \text{quand} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

et des conditions de compatibilité sur  $(\rho^{\text{in}}, u^{\text{in}})$ . Alors, le système d'Euler (1.5) dans  $\Omega$  avec données initiales  $(\rho^{\text{in}}, u^{\text{in}})$ , condition à l'infini (1.13) et la condition de Neumann  $u \cdot n = 0$  sur le bord  $\partial\Omega$  de l'obstacle possède une unique solution locale  $(\rho, u) \in (1, u^\infty) + \mathcal{C}([0, T], H^3(\Omega))$  et, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$|\psi_\varepsilon|^2 - \rho \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^\infty([0, T], L^2(\Omega)) \quad \text{et} \quad \varepsilon \langle i\psi_\varepsilon, \nabla_z \psi_\varepsilon \rangle - \rho u \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^\infty([0, T], L^1_{loc}(\Omega)).$$

Les conditions de compatibilité sur  $(\rho^{\text{in}}, u^{\text{in}})$  proviennent du fait que l'on envisage une solution régulière du système d'Euler, ce qui implique entre autre que, pour  $0 \leq k \leq 2$ ,

$$n \cdot (\partial_\tau^k u)|_{\tau=0} = 0.$$

Le point clé de cette approche est que la fonctionnelle  $\mathcal{H}^\varepsilon$  satisfait une estimation de croissance du type

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{H}^\varepsilon \leq C(u)(\mathcal{H}^\varepsilon + \varepsilon^2) \tag{1.14}$$

pour une constante  $C(u)$  dépendant seulement de  $\|\nabla u\|_{L^\infty}$  et  $\|\nabla(\nabla \cdot u)\|_{L^2}$ . Par conséquent, si  $\mathcal{H}^\varepsilon$  est petit initialement, alors il reste petit sur un intervalle de temps  $[0, T]$ . L'avantage principal de cette méthode est de pouvoir comparer deux solutions quasiment dans l'espace d'énergie, mais ne permet pas de justifier que  $\Psi_\varepsilon$  reste régulière. En outre, elle ne semble pas pouvoir permettre de justifier un développement en  $\varepsilon$  de type (1.9).

Afin de comparer avec la méthode de E. Grenier [75], il faut ici tout d'abord résoudre le système d'Euler pour données régulières (ce qui est un point inévitable), puis résoudre le problème de Cauchy pour  $(\text{NLS}_\varepsilon)$  sur un intervalle de temps  $0 \leq \tau = \varepsilon t \leq \tau_0$  (disons dans  $H^2$  pour justifier les intégrations par parties dans (1.14), ou pour des solutions faibles obtenues comme limite de solution plus régulières), et enfin comparer les deux via  $\mathcal{H}^\varepsilon$ . La résolution de  $(\text{NLS}_\varepsilon)$  peut être globale lorsque  $f$  croît polynômialement à l'infini en dimension  $d = 1$ . En dimension  $d = 2$ , cela peut aussi être le cas en utilisant l'argument de Brézis-Gallouët : si  $u \in H^2(\mathbb{R}^2)$  et  $\|u\|_{H^1} \leq R$ , alors  $\|u\|_{L^\infty} \leq C_R(1 + \sqrt{\ln(1 + \|u\|_{H^2})})$ . Cet argument est utilisé dans [120], ce qui le limite à la dimension  $d = 2$ . Néanmoins, même dans le cas défocalisant, la nonlinéarité peut devenir critique et le problème de Cauchy beaucoup plus difficile à résoudre globalement en temps dans  $H^1$  : voir [51] pour  $(\text{NLS})$  quintique dans  $\mathbb{R}^3$ , ou [9] avec  $d = 3$  et une condition de Neumann dans un domaine extérieur non captant, afin de pouvoir utiliser les estimations de Strichartz de [42], ou encore [89]. En outre, dans le cas où  $f$  est croissante quand  $\varrho$  est petit et tend vers  $-\infty$  en  $+\infty$ , les résultats de J. Ginibre et G. Velo [69] sur l'existence de solutions faibles  $H^1$  ne s'appliquent plus, et l'on peut d'ailleurs avoir explosion dans  $H^1$  en temps fini. Ainsi, dans le théorème 1 de T. Alazard et R. Carles, même le fait que la régularité persiste pour  $0 \leq \tau = \varepsilon t \leq \tau_0$  est un point intéressant en soi. Mentionnons enfin que pour le problème étudié dans [120], la méthode de E. Grenier [75] nécessiterait de travailler avec des  $\varepsilon$ -dérivées pour traiter le bord.

La méthode d'énergie modulée a été étendue au cas de modèles d'équations de Schrödinger couplées par T.C. Lin et P. Zhang ([121]) et par C.C. Lee et T.C. Lin ([119]) lorsque l'on prend en compte un potentiel régulier confinant et un champ électromagnétique régulier.

### 1.1.3 Notre approche : linéarisation autour d'une solution approchée

Afin de pouvoir considérer une nonlinéarité aussi générale que possible, nous ne ferons sur  $f$  que les hypothèses suivantes :

$$(A) \quad f \in C^\infty([0, +\infty[), \quad f(0) = 0, \quad f' > 0 \text{ sur } ]0, +\infty[, \quad \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(n)}(0) \neq 0.$$

On autorise donc  $f'$  à s'annuler à l'origine, et on inclut toutes les  $f$  homogènes  $f(\varrho) = \varrho^\sigma$  avec  $\sigma \in \mathbb{N}^*$ , ainsi que les exemples donnés page 4, dès lors que l'on travaille sur un intervalle avec  $f' > 0$ . En effet, puisque l'on travaille avec des solutions régulières (donc  $L^\infty$ ), on peut toujours se restreindre à un tel intervalle. Notre résultat principal est le suivant.

**Théorème 3.**  $[A_2]$  *On suppose que  $f$  vérifie (A), et on considère une donnée initiale oscillante (1.3) avec  $\varphi_\varepsilon^{\text{in}}$  réelle,  $a_\varepsilon^{\text{in}}, \varphi_\varepsilon^{\text{in}}$  dans  $H^\infty$  et telles que, pour des fonctions réelles  $(\varphi^{\text{in}}, a^{\text{in}}) \in H^\infty$ , on a, pour tout  $s \in \mathbb{N}$ ,*

$$\|a_\varepsilon^{\text{in}} - a^{\text{in}}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \|\varphi_\varepsilon^{\text{in}} - \varphi^{\text{in}}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Alors, il existe  $\tau_b > 0$  tel que (1.10) avec données initiales  $(a^{\text{in}}, \varphi^{\text{in}})$  possède une unique solution maximale régulière  $(a, \varphi) \in \mathcal{C}([0, \tau_b], H^\infty \times H^\infty)$ . De plus, il existe  $T \in ]0, \tau_b]$  tel que, pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , la solution  $\psi_\varepsilon$  de  $(\text{NLS}_\varepsilon)$  avec donnée initiale (1.3) existe au moins sur  $[0, T]$  et satisfait, pour tout  $s \in \mathbb{N}$ ,

$$\sup_{\varepsilon \in ]0, 1]} \left\| \psi_\varepsilon \exp\left(-\frac{i}{\varepsilon}\varphi\right) \right\|_{L^\infty([0, T], H^s(\mathbb{R}^d))} < +\infty.$$

Plus précisément, il existe  $\varphi_\varepsilon = \varphi + \mathcal{O}_{H^\infty}(\varepsilon)$  tel que, pour tout  $s \in \mathbb{N}$ ,

$$\left\| \psi_\varepsilon \exp\left(-\frac{i}{\varepsilon}\varphi_\varepsilon\right) - a \right\|_{L^\infty([0, T], H^s(\mathbb{R}^d))} = \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (1.15)$$

En particulier, on généralise le théorème 1 de T. Alazard et R. Carles sans aucune restriction entre  $s$ ,  $d$  et  $\sigma$ . Les bornes uniformes (1.15) permettent de déduire immédiatement les convergences des quantités physiques quadratiques, comme dans les théorèmes 1 et 2

$$|\psi_\varepsilon|^2 = a + \mathcal{O}_{L^\infty([0, T], H^s(\mathbb{R}^d))}(\varepsilon), \quad \varepsilon \langle i\psi_\varepsilon, \nabla_z \psi_\varepsilon \rangle = a^2 \nabla_z \varphi + \mathcal{O}_{L^\infty([0, T], H^s(\mathbb{R}^d))}(\varepsilon).$$

Noter enfin que pour (1.15), la correction d'ordre  $\varepsilon$  dans la phase  $\varphi$  n'est pas surprenante, puisque cela modifie l'amplitude à l'ordre dominant. Etant donnée la manière dont on construit (voir plus bas) la solution  $\psi_\varepsilon$ , il est possible de considérer une donnée non nulle à l'infini  $|\Psi| \rightarrow r_0$  ou de travailler avec les conditions à l'infini (1.12) prises pour le problème de l'obstacle envisagé dans [120] (théorème 2).

Le théorème 3 contient un résultat d'existence locale de solutions régulières pour (1.10) dans le cas d'une nonlinéarité générale satisfaisant (A) (cf. théorème 4 dans  $[A_2]$  pour un énoncé avec données  $H^s$  avec pertes de dérivées). Cela étend le cas homogène étudié dans [126]. La symétrisation nonlinéaire introduite dans [126] ne permet pas la réduction de (1.10) à un système hyperbolique symétrisable à coefficients réguliers, mais à un nouveau système pour lequel il nous a quand même été possible d'obtenir des estimations d'énergie en symétrisant uniquement la partie d'ordre 1.

Lorsque la donnée initiale est développée en  $\varepsilon$ , nous pouvons établir le résultat suivant (aussi démontré par T. Alazard et R. Carles dans [3] avec les restrictions sur  $s$ ,  $d$ ,  $\sigma$  déjà mentionnées) :

**Théorème 4.**  $[A_2]$  *Sous les hypothèses du théorème 3, et en supposant en outre les développements*

$$a_\varepsilon^{\text{in}}(z) = \sum_{j=0}^m \varepsilon^j a_j^{\text{in}}(z) + \mathcal{O}_{H^\infty}(\varepsilon^{m+1}) \quad \varphi_\varepsilon^{\text{in}}(z) = \sum_{j=0}^m \varepsilon^j \varphi_j^{\text{in}}(z) + \mathcal{O}_{H^\infty}(\varepsilon^{m+1})$$

pour un entier  $m \geq 1$ , on considère  $(a_j, \varphi_j) \in \mathcal{C}([0, \tau_b], H^\infty)$ ,  $0 \leq j \leq m$ , données par la hiérarchie WKB, et on note

$$a_\varepsilon(z) \equiv \sum_{j=0}^m \varepsilon^j a_j(z), \quad \varphi_\varepsilon(z) \equiv \sum_{j=0}^m \varepsilon^j \varphi_j(z).$$

Alors, pour tout  $T \in (0, \tau_b)$ , il existe  $\varepsilon_0(T) > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0(T))$ , la solution de  $(\text{NLS}_\varepsilon)$  avec donnée initiale  $\psi_\varepsilon^{\text{in}}$  reste régulière sur  $[0, T]$  et satisfait, pour tout  $s \in \mathbb{N}$ , l'estimée

$$\left\| \psi_\varepsilon \exp\left(-\frac{i}{\varepsilon}\varphi_\varepsilon\right) - a_\varepsilon \right\|_{L^\infty([0, T], H^s(\mathbb{R}^d))} \leq C_{s, T} \varepsilon^{m+1}.$$

Le théorème 3 correspondrait au cas  $m = 0$ . Noter toutefois que, au-delà de la possibilité de développer en  $\varepsilon$  la solution, dès que  $m \geq 1$ , on peut choisir  $T$  aussi proche que voulu de  $\tau_b$  (pour  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(T)$ ), alors que le théorème 3 vaut pour un  $0 < T < \tau_b$ . La compréhension de la limite Euler pour (NLS) au-delà des chocs dans le système d'Euler, *i.e.* après  $\tau_b$ , est certainement très difficile. On pourra trouver des références dans  $[\mathcal{A}_3]$  dans le contexte Schrödinger linéaire (avec transformée de Wigner) ou intégrable.

**Quelques idées sur la démonstration.** Nous prouvons le théorème 3 en deux étapes. La première consiste en la construction d'une solution approchée de  $(\text{NLS}_\varepsilon)$  sous la forme  $\psi_\varepsilon^{\text{app}} = \mathbf{a}_\varepsilon \exp(i\varphi_\varepsilon/\varepsilon)$ , de sorte que

$$i\varepsilon \frac{\partial \psi_\varepsilon^{\text{app}}}{\partial \tau} + \varepsilon^2 \Delta_z \psi_\varepsilon^{\text{app}} - \psi_\varepsilon^{\text{app}} f(|\psi_\varepsilon^{\text{app}}|^2) = \exp(i\varphi_\varepsilon/\varepsilon) \times \mathcal{O}_{H^\infty}(\varepsilon).$$

Pour le théorème 3, il suffit de prendre la solution régulière  $(a, \varphi)$  de (1.10) plus la correction  $\mathcal{O}_{H^\infty}(\varepsilon)$  provenant du fait que  $(a_\varepsilon^{\text{in}}, \varphi_\varepsilon^{\text{in}}) - (a^{\text{in}}, \varphi^{\text{in}}) = \mathcal{O}_{H^\infty}(\varepsilon)$ . Ainsi,  $\psi_\varepsilon^{\text{app}} = \psi_\varepsilon^{\text{in}}$  à  $\tau = 0$ . Pour le théorème 4, on inclut les termes suivants du développement, et cela change le reste  $\mathcal{O}_{H^\infty}(\varepsilon)$  pour  $\mathcal{O}_{H^\infty}(\varepsilon^{m+1})$ . La construction de  $\psi_\varepsilon^{\text{app}}$  se fait en séparant  $(\text{NLS}_\varepsilon)$  sous la forme proposée par E. Grenier [75] (section 1.1.1). En effet, on sait résoudre (1.10), et le terme dispersif de pression quantique qui est  $\varepsilon^2 \nabla \left( \frac{\Delta \sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}} \right)$  dans (1.2) devient  $i\varepsilon \Delta \mathbf{A}_\varepsilon$  dans la formulation "à la E. Grenier". L'avantage est que l'on a un terme linéaire, et qui est toujours bien défini, même lorsque la fonction d'onde  $\Psi$  s'annule. La seconde étape est un résultat de stabilité : on cherche une solution exacte de  $(\text{NLS}_\varepsilon)$  sous la forme

$$\psi_\varepsilon = \psi_\varepsilon^{\text{app}} + w \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \varphi_\varepsilon\right) = (\mathbf{a}_\varepsilon + w) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \varphi_\varepsilon\right),$$

où  $w$  est censé être petit, et l'on trouve que  $w$  résout l'équation de Schrödinger nonlinéaire

$$i\varepsilon \left( \partial_\tau w + 2u_\varepsilon \cdot \nabla_z w + w \nabla_z \cdot u_\varepsilon \right) + \varepsilon^2 \Delta_z w - 2\langle w, \mathbf{a}_\varepsilon \rangle f'(|\mathbf{a}_\varepsilon|^2) \mathbf{a}_\varepsilon = w \times \mathcal{O}_{H^\infty}(\varepsilon) + \mathcal{O}_{H^\infty}(\varepsilon^2) + Q_\varepsilon(w). \quad (1.16)$$

Ici,  $u_\varepsilon \equiv \nabla_z \varphi_\varepsilon$  et  $Q_\varepsilon(w)$  contient tous les termes au moins quadratiques en  $w$  dans la nonlinéarité  $f$ . Le terme  $\mathcal{O}_{H^s}(\varepsilon)$  est l'erreur naturelle dans l'équation pour la phase dans le système (1.1), et  $\mathcal{O}_{H^s}(\varepsilon^2)$  celle pour l'amplitude. Puisque  $w$  restera petit, on va travailler sur la linéarisation de (1.16) avec un terme source. Pour cette équation linéaire, l'énergie adaptée s'écrit

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon^2 |\nabla_z w|^2 + 2f'(|\mathbf{a}_\varepsilon|^2) \langle w, \mathbf{a}_\varepsilon \rangle^2 dz,$$

ou plus précisément la norme à poids (avec une constante  $K > 0$ )

$$N^\varepsilon(w) \equiv \int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon^2 |\nabla_z w|^2 + 2f'(|\mathbf{a}_\varepsilon|^2) \langle w, \mathbf{a}_\varepsilon \rangle^2 + K\varepsilon^2 |w|^2 dz.$$

La norme  $H^s$  correspondante sera

$$N_s^\varepsilon(w) \equiv \sum_{|\alpha| \leq s-1} N^\varepsilon(\partial_z^\alpha w) + K \|\text{Re } w\|_{H^{s-2}(\mathbb{R}^d)}^2,$$

où l'on a inclus le dernier terme afin de contrôler certains commutateurs. On trouve dans [76], par exemple, des énergies modulées linéaires similaires introduites dans l'étude de problèmes asymptotiques en mécanique des fluides. Bien évidemment, lorsque  $f' > 0$  et  $\mathbf{a}_\varepsilon$  est loin de zéro, le terme central de  $N^\varepsilon$  fournit un contrôle  $L^2$  sur  $\text{Re}(w)$ .

On remarquera que l'on ne résout pas  $(\text{NLS}_\varepsilon)$  pour  $\psi_\varepsilon$  dans  $H^s$  ou  $H^1$ , mais juste (1.16) pour  $w$  dans un Sobolev  $H^s$ ,  $s > 1 + d/2$ , ce qui présente le gros avantage d'éviter les difficultés liés au problème de Cauchy déjà mentionnés. Le contrôle sur la croissance des fonctionnelles  $N_s^\varepsilon$  permettra de minorer le temps d'existence pour  $w$  dans  $H^s$  indépendamment de  $\varepsilon$ .

Notre approche présente aussi l'avantage de pouvoir envisager le cas d'un domaine à bord, lorsque l'on travaille avec une donnée de Neumann homogène

$$\frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial n} = 0.$$

On se restreindra au cas d'un demi-espace

$$z \in \mathbb{R}_+^d = \mathbb{R}^{d-1} \times ]0, +\infty[ \ni (z', z_d).$$

Ce problème nécessite de prendre en compte les couches limites si l'on veut travailler avec des normes régulières, mais pas pour des convergences dans des espaces  $L^p$  comme le font F.-H. Lin et P. Zang dans [120] (théorème 2). Plus précisément, puisque la solution  $(a, u)$  du système d'Euler (1.10) avec condition de Neumann  $u \cdot n = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n} = 0$  sur  $\partial \mathbb{R}_+^d$  ne vérifie pas *a priori* en même temps la condition de Neumann  $\partial_{z_d} a(\tau, z', 0) = 0$ , une couche limite qui rattrape cette condition apparaît : elle est de faible amplitude  $\varepsilon$  et de longueur caractéristique  $\varepsilon$ . Ces couches limites sont formellement décrites dans l'article de C-T. Pham, C. Nore et M-E. Brachet dans [142], mais en développant à la fois en  $\varepsilon$  et en fonction de la vitesse à l'infini  $u^\infty$ , supposée petite. Les développements WKB sont alors de la forme  $\psi_\varepsilon = \mathbf{a}_\varepsilon \exp(\frac{i}{\varepsilon} \varphi_\varepsilon)$  avec

$$\mathbf{a}_\varepsilon(\tau, z) = a(\tau, z) + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k \left( \mathbf{a}_k(\tau, z) + A_k(\tau, z', \frac{z_d}{\varepsilon}) \right), \quad \varphi_\varepsilon(\tau, z) = \varphi(\tau, z) + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k \left( \varphi_k(\tau, z) + \Phi_k(\tau, z', \frac{z_d}{\varepsilon}) \right),$$

avec des profils  $A_k(\tau, z', Z)$ ,  $\Phi_k(\tau, z', Z)$  exponentiellement décroissant en  $Z$ , et déterminés par le fait que  $\psi_\varepsilon^{\text{app}} = \mathbf{a}_\varepsilon \exp(\frac{i}{\varepsilon} \varphi_\varepsilon)$  vérifie la condition de Neumann  $\frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial n} = 0$ . La construction de la solution approchée WKB à l'ordre  $m$  se fait sur le système de Madelung (1.1) classique (pour ne plus mélanger phase et amplitude), et l'on demande donc à l'amplitude d'être loin de zéro. Le terme principal  $(a, \varphi)$  est la solution de (1.10) avec la condition de Neumann sur la phase  $n \cdot \nabla_z \varphi = 0$  sur  $\partial \mathbb{R}_+^d$ . Nous prouvons dans [A<sub>2</sub>] que ce développement WKB est nonlinéairement stable. L'analyse est perturbée par le fait qu'un terme du type  $\varepsilon^2 \Delta_z \mathbf{a}_\varepsilon$  se retrouve potentiellement de taille  $\varepsilon$  près du bord à cause de la couche limite. Toutefois, ce terme reste suffisamment petit pour être absorbable.

**Théorème 5.** *Soit  $\psi_\varepsilon^{\text{app}, m} = \mathbf{a}_\varepsilon e^{i\varphi_\varepsilon/\varepsilon}$  une solution approchée WKB définie sur  $[0, \tau_m]$ . Si  $d \leq 3$  et  $m \geq 4$ , il existe une unique solution régulière  $\psi_\varepsilon$  sur  $[0, T_m]$  de l'équation de Gross-Pitaevskii*

$$i\varepsilon \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial \tau} + \varepsilon^2 \Delta_z \psi_\varepsilon = \psi_\varepsilon (|\psi_\varepsilon|^2 - 1),$$

avec les conditions

$$\frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial \mathbb{R}_+^d, \quad \psi_\varepsilon(\tau, z) \sim \exp \left( -i\tau \frac{|u^\infty|^2}{2\varepsilon} + i \frac{u^\infty \cdot z}{\varepsilon} \right), \quad |z| \rightarrow +\infty,$$

telle que  $(\psi_\varepsilon)|_{\tau=0} = (\psi_\varepsilon^{\text{app}, m})|_{\tau=0}$ . De plus, on a, sur  $[0, T_m]$ ,

$$\varepsilon \|\psi_\varepsilon e^{-i\varphi_\varepsilon/\varepsilon} - \mathbf{a}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}_+^d)} + \varepsilon^3 \|\psi_\varepsilon e^{-i\varphi_\varepsilon/\varepsilon} - \mathbf{a}_\varepsilon\|_{H^3(\mathbb{R}_+^d)} \leq C_m \varepsilon^{m-\frac{1}{2}},$$

d'où en particulier

$$\|\psi_\varepsilon e^{-i\varphi_\varepsilon/\varepsilon} - (a + \varepsilon A_1)\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+^d)} \leq C_m \max\{\varepsilon, \varepsilon^{m-\frac{7}{2}}\}. \quad (1.17)$$

On notera que, pour comparer avec le théorème 3, la donnée initiale est ici exactement la solution WKB approchée  $\psi^{\text{app}, m}$ . En particulier, elle doit vérifier des conditions de compatibilité sur le bord. Pour un résultat de comparaison dans  $W^{1,\infty}$  (ce que ne donne pas le théorème 2 de [120]), il faut absolument inclure le terme  $\varepsilon A_1$ , de gradient de taille 1 dans  $L^\infty$ . On notera que, par comparaison avec le théorème 2, notre résultat vaut en dimension quelconque (puisque l'on ne résout pas (NLS) globalement dans  $H^1$ , on a pris  $d \leq 3$  juste pour simplifier l'énoncé). Dans le théorème 5, nous nous sommes restreints à la nonlinéarité de Gross-Pitaevskii juste par souci de simplicité, mais une  $f$  plus générale peut sans problème être prise en compte. Pour terminer, mentionnons que l'on utilise des  $\varepsilon$ -dérivées pour la variable transverse au bord, ce qui explique le terme  $\varepsilon$  devant la norme  $H^1$  et le terme  $\varepsilon^3$  devant la norme  $H^3$ , et explique aussi que l'on doit avoir un reste beaucoup plus petit que précédemment, et donc une solution approchée à un ordre suffisamment élevé ( $m \geq 4$ ).

Imposer une condition de Dirichlet homogène

$$\psi = 0 \quad \text{sur } \partial \mathbb{R}_+^d$$

présente aussi un intérêt physique (voir les articles de T. Frisch, Y. Pomeau et S. Rica [62] ainsi que [142] pour un développement asymptotique formel des couches limites dans ce cas). Toutefois, comme il est fréquent en

mécanique des fluides, celle-ci est plus difficile à traiter. En effet, si la longueur caractéristique reste bien  $\varepsilon$ , son amplitude est maintenant de taille 1, puisqu'il faut rattraper la condition " $a = 0$ ". Par conséquent, le terme  $\varepsilon^2 \Delta \mathbf{a}_\varepsilon$ , par exemple, devient de taille un près du bord et n'est donc pas petit.

Ici, est soulevée la question délicate de la modélisation de l'obstacle. Imposer une condition de Dirichlet homogène comme dans [142] pourrait être un peu trop grossière, et certains proposent d'utiliser un potentiel (voir, *e.g.*, [83] ou [85]) qui serait une régularisation du potentiel

$$V = +\infty \quad \text{sur l'obstacle,} \quad 0 \quad \text{ailleurs}$$

comme par exemple,

$$V^\varepsilon(z) = V_0 \left( 1 - \tanh(\text{dist}(z, \omega)/\varepsilon) \right).$$

Des travaux [62], [142], [83] ou [85], il émerge que ces différentes modélisations ne modifient pas profondément les résultats physiques qualitatifs, mais certaines valeurs comme la vitesse critique pour la nucléation des vortex. Cependant, l'analyse mathématique s'en trouve peut-être changée. Il faut par exemple donner un lien entre la valeur de  $V_0$ , l'échelle de régularisation  $\varepsilon$  du potentiel et la longueur de cohérence  $\varepsilon$ . Lorsque l'on essaye de travailler avec notre approche avec une condition de Dirichlet homogène, les difficultés sont les suivantes : la couche limite rend maintenant le terme  $\varepsilon^2 \Delta_z \mathbf{a}_\varepsilon$  d'ordre 1 ; l'amplitude s'annule sur le bord ; la linéarisation autour du profil de couche limite a un noyau engendré par la fonction  $\tanh$  qui est bornée mais ne décroît pas à l'infini.

Dans [4], T. Alazard et R. Carles font l'observation suivante (à la suite d'un résultat de G. Lebeau). Supposons que la donnée initiale soit non oscillante à l'instant initial :

$$\psi_\varepsilon^{\text{in}} = a^{\text{in}} = a^{\text{in}} \mathbf{e}^{i\varphi_\varepsilon^{\text{in}}/\varepsilon} \quad \text{avec} \quad \varphi_\varepsilon^{\text{in}} = 0.$$

Si  $(a, \varphi)$  désigne la solution de (1.10) avec donnée initiale  $(a^{\text{in}}, \varphi_\varepsilon^{\text{in}} = 0)$  et  $a^{\text{in}}$  non nulle, alors  $\varphi$  n'est pas nulle en temps strictement positif, car  $(\partial_\tau \varphi)|_{\tau=0} = -f((a^{\text{in}})^2) \neq 0$ . Ceci entraîne que  $\psi_\varepsilon$  devient très oscillante pour  $\tau > 0$ . Cette remarque est l'ingrédient clé de la justification de perte de régularité pour le problème de Cauchy  $H^s$  supercritique pour (NLS) dans [4], en utilisant la méthode d'énergie modulée (il n'est pas utile d'avoir un contrôle de  $\varphi$  en norme régulière). Le théorème de [4] est écrit pour des nonlinéarités homogènes. Notre approche devrait pouvoir permettre de traiter une nonlinéarité plus générale. Toutefois, l'homogénéité de la nonlinéarité permet de prendre dans [4] une suite de données initiales petites dans  $H^s$ , alors qu'elles devront être, dans un cas plus général, de norme  $L^\infty$  suffisamment grande pour voir le comportement de  $f$  au voisinage de  $+\infty$ .

## 1.2 Régime onde linéaire

*[Bien que n'ayant pas apporté de contribution associée à cette sous-section, elle apparaît comme un prolongement naturel de la sous-section précédente et permet de mettre en évidence la vitesse du son, qui joue un rôle fondamental dans la suite.]*

La linéarisation des équations d'Euler (1.5) autour de l'état constant ( $\rho = \rho_0 > 0, u = 0$ ) donne une équation d'onde linéaire. Dans notre contexte, lorsque l'on travaille avec une donnée non nulle à l'infini

$$|\Psi(t, x)| \rightarrow r_0 = 1 \quad \text{quand} \quad |x| \rightarrow +\infty,$$

on peut effectuer cette linéarisation avec  $\rho_0 \equiv r_0^2 = 1$ , ce qui donne

$$\begin{cases} \partial_\tau \bar{\rho} + 2\nabla_z \cdot \bar{u} & = 0 \\ \partial_\tau \bar{u} + f'(1)\nabla_z \bar{\rho} & = 0, \end{cases}$$

et fait apparaître la vitesse du son

$$c_s \equiv \sqrt{2f'(1)} > 0,$$

dès que  $f'(1) > 0$ , *i.e.* que l'on se place dans le cas défocalisant (le système d'Euler est hyperbolique) autour de  $\varrho = 1$ . Par conséquent, on considère une donnée initiale du type

$$\Psi_\varepsilon^{\text{in}}(x) = \psi_\varepsilon^{\text{in}}(z) = \sqrt{1 + \varepsilon a_\varepsilon^{\text{in}}(z)} \exp\left(i\phi_\varepsilon^{\text{in}}(z)\right), \quad z = \varepsilon x,$$



ce qui correspond bien pour le système d'Euler (1.2) avec pression quantique à

$$\begin{cases} \varrho_\varepsilon^{\text{in}}(x) &= 1 + \varepsilon a_\varepsilon^{\text{in}}(z) \\ v_\varepsilon^{\text{in}}(x) &= \varepsilon(\nabla_z \phi_\varepsilon^{\text{in}})(z) = \varepsilon u_\varepsilon^{\text{in}}(z) \end{cases} \quad z = \varepsilon x.$$

Avec l'ansatz

$$\Psi_\varepsilon(t, x) = \psi_\varepsilon(\tau, z) = \sqrt{1 + \varepsilon a_\varepsilon(\tau, z)} \exp(i\phi_\varepsilon(\tau, z)), \quad \tau = \varepsilon t, \quad z = \varepsilon x,$$

c'est-à-dire les mises à l'échelle

$$\begin{cases} \varrho_\varepsilon(t, x) &= 1 + \varepsilon a_\varepsilon(\tau, z) \\ v_\varepsilon(t, x) &= \varepsilon(\nabla_z \phi_\varepsilon)(\tau, z) = \varepsilon u_\varepsilon(z), \end{cases} \quad \tau = \varepsilon t, \quad z = \varepsilon x,$$

le système de Madelung (1.2) devient

$$\begin{cases} \partial_\tau a_\varepsilon + 2\nabla_z \cdot u_\varepsilon = -\varepsilon \nabla_z \cdot (a_\varepsilon u_\varepsilon) \\ \partial_\tau u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_z \left( f(1 + \varepsilon a_\varepsilon) \right) = -2\varepsilon (u_\varepsilon \cdot \nabla_z) u_\varepsilon + \varepsilon \nabla_z \left( \frac{\Delta_z \sqrt{1 + \varepsilon a_\varepsilon}}{\sqrt{1 + \varepsilon a_\varepsilon}} \right). \end{cases} \quad (1.18)$$

En utilisant le développement de Taylor

$$f(1 + \varepsilon a_\varepsilon) = \varepsilon f'(1) a_\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

la limite formelle est alors naturellement l'équation d'onde linéaire

$$\begin{cases} \partial_\tau a + 2\nabla_z \cdot u = 0 \\ \partial_\tau u + f'(1) \nabla_z a = 0. \end{cases}$$

Pour le contexte physique des ondes acoustiques dans (NLS), voir [137]. Le régime onde[50] linéaire pour l'équation de Gross-Pitaevskii (GP) a été étudié dans par T. Colin et A. Soyeur puis pour des convergences fortes par F. Béthuel, R. Danchin et D. Smets dans [28]. Bien évidemment, cela correspond formellement à un développement WKB du type

$$a_\varepsilon^{\text{in}} = 1 + \varepsilon a_1^{\text{in}} + \dots, \quad \varphi_\varepsilon^{\text{in}} = 0 + \varepsilon \varphi_1^{\text{in}} + \dots,$$

et qui resterait valable en temps positif. Toutefois, l'analyse de la sous-section 1.1 est centrée sur les temps  $t$  d'ordre  $\varepsilon^{-1}$ . Notons qu'ici, l'on travaille avec des données initiales plus petites d'un facteur  $\varepsilon$  en comparaison avec le régime WKB, et par conséquent, la dynamique non triviale aura lieu sur une échelle de temps plus grande. En outre, pour le régime onde linéaire, la fonction d'onde  $\Psi$  ne s'annule pas.

Le premier résultat de [28] est le suivant : il contient des bornes Sobolev uniformes (avec pertes de dérivées) ainsi qu'un résultat de comparaison avec l'équation d'onde linéaire.

**Théorème 6** ([28]). *Soit  $s > 1 + d/2$ . Il existe  $C = C(s, d) > 0$  telle que pour toute donnée initiale pour  $(NLS_\varepsilon)$  du type*

$$\psi_\varepsilon^{\text{in}}(z) = (1 + \varepsilon a_\varepsilon^{\text{in}}(z)) \exp(i\phi_\varepsilon^{\text{in}}(z))$$

avec

$$C\varepsilon \|(a_\varepsilon^{\text{in}}, u_\varepsilon^{\text{in}} = \nabla_z \phi_\varepsilon^{\text{in}})\|_{H^{s+1} \times H^s} \leq 1,$$

il existe, pour un

$$T^\varepsilon \geq \frac{1}{C\varepsilon \|(a_\varepsilon^{\text{in}}, u_\varepsilon^{\text{in}})\|_{H^{s+1} \times H^s}},$$

une unique solution  $(a_\varepsilon, u_\varepsilon) \in \mathcal{C}([0, T^\varepsilon], H^{s+1} \times H^s)$  à (1.18), vérifiant, pour  $0 \leq \tau = \varepsilon t \leq T^\varepsilon$ ,

$$\|(a_\varepsilon, u_\varepsilon)(\tau)\|_{H^{s+1} \times H^s} \leq C \|(a_\varepsilon^{\text{in}}, u_\varepsilon^{\text{in}})\|_{H^{s+1} \times H^s} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \leq 1 + \varepsilon a^\varepsilon \leq 2.$$

Par conséquent, en notant  $(\mathbf{a}_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)$  la solution de l'équation des ondes

$$\begin{cases} \partial_\tau \mathbf{a}_\varepsilon + 2\nabla_z \cdot \mathbf{u}_\varepsilon & = 0 \\ \partial_\tau \mathbf{u}_\varepsilon + f'(1)\nabla_z \mathbf{a}_\varepsilon & = 0, \end{cases}$$

de donnée initiale  $(\mathbf{a}_\varepsilon^{\text{in}}, \mathbf{u}_\varepsilon^{\text{in}})$ , alors, pour  $0 < \varepsilon < 1$  et  $0 \leq \tau = \varepsilon t \leq T^\varepsilon$ ,

$$\|(a_\varepsilon, u_\varepsilon)(\tau) - (\mathbf{a}_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)(\tau)\|_{H^{s-2}} \leq C \left[ \varepsilon \tau \|(a_\varepsilon^{\text{in}}, u_\varepsilon^{\text{in}})\|_{H^{s-1} \times H^s}^2 + \varepsilon^2 \tau \|(a_\varepsilon^{\text{in}}, u_\varepsilon^{\text{in}})\|_{H^{s+1} \times H^s} \right].$$

Ceci fait apparaître le régime onde linéaire pour des échelles de temps  $0 \leq \varepsilon t = \tau \ll \varepsilon^{-1}$ , i.e.  $0 \leq t \ll \varepsilon^{-2}$ . Cependant, du fait que l'équation limite est linéaire, le second résultat de [28] exploite l'effet dispersif de l'équation (que l'on trouve dans [1]) où l'on garde le terme de pression quantique

$$\begin{cases} \partial_\tau \mathbf{a}_\varepsilon + 2\nabla_z \cdot \mathbf{u}_\varepsilon & = 0 \\ \partial_\tau \mathbf{u}_\varepsilon + f'(1)\nabla_z \mathbf{a}_\varepsilon & = \varepsilon \nabla_z \Delta_z \mathbf{a}_\varepsilon. \end{cases}$$

Cela permet, en dimension  $d \geq 2$ , d'améliorer l'intervalle de temps sur lequel l'approximation onde est valable et d'obtenir un intervalle contenant toujours, en variable  $t$  et si  $d \geq 2$ , strictement  $[0, \mathcal{O}(\varepsilon^{-2})]$ , mais on s'arrête toujours bien avant les temps  $t \simeq \varepsilon^{-3}$ .

### 1.3 Régime (KdV)/(KP-I)

Le régime asymptotique (KdV)/(KP-I) pour

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Delta \Psi = \Psi f(|\Psi|^2), \quad (\text{NLS})$$

donne, comme dans le problème des vagues décrit par le système d'Euler à surface libre, une description d'une onde de petite amplitude se propageant à la vitesse du son  $\mathbf{c}_s = \sqrt{2f'(1)}$  dans la direction  $x_1$  et, pour  $d \geq 2$ , avec une modulation lente dans les variables transverses  $x_\perp = (x_2, \dots, x_d)$ . Plus précisément, on fait l'ansatz

$$\Psi_\varepsilon(t, x) = \left(1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon(\tau, z)\right) \exp(i\varepsilon \phi_\varepsilon(\tau, z)) \quad \tau = \varepsilon^3 t, \quad z_1 \equiv \varepsilon(x_1 - \mathbf{c}_s t), \quad z_\perp \equiv \varepsilon^2 x_\perp, \quad (1.19)$$

où l'on a normalisé  $r_0 = 1$ . On notera la translation selon  $x_1$  à la vitesse du son et la modulation transverse sur l'échelle  $\varepsilon^{-2}$ , et on ré-écrit le système (1.2) remis à l'échelle

$$\begin{cases} \partial_\tau A_\varepsilon - \frac{\mathbf{c}_s}{\varepsilon^2} \partial_{z_1} A_\varepsilon + 2\partial_{z_1} \phi_\varepsilon \partial_{z_1} A_\varepsilon + 2\varepsilon^2 \nabla_{z_\perp} \phi_\varepsilon \cdot \nabla_{z_\perp} A_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} (1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon) \left( \partial_{z_1}^2 \phi_\varepsilon + \varepsilon^2 \Delta_{z_\perp} \phi_\varepsilon \right) = 0 \\ \partial_\tau \phi_\varepsilon - \frac{\mathbf{c}_s}{\varepsilon^2} \partial_{z_1} \phi_\varepsilon + (\partial_{z_1} \phi_\varepsilon)^2 + \varepsilon^2 |\nabla_{z_\perp} \phi_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon^4} f\left((1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon)^2\right) - \frac{\partial_{z_1}^2 A_\varepsilon + \varepsilon^2 \Delta_{z_\perp} A_\varepsilon}{1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon} = 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

Formellement, si  $A_\varepsilon$  et  $\phi_\varepsilon$  sont effectivement d'ordre 1 et convergent vers  $A$  et  $\phi$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on doit avoir compensation des termes singuliers en  $\varepsilon^{-2}$  dans (1.20). Ceci donne, pour la première équation

$$-\mathbf{c}_s \partial_{z_1} A + \partial_{z_1}^2 \phi = 0,$$

et pour la seconde, on utilise le développement de Taylor

$$f\left((1 + \alpha)^2\right) = \mathbf{c}_s^2 \alpha + \left(\frac{\mathbf{c}_s^2}{2} + 2f''(1)\right) \alpha^2 + f_3(\alpha), \quad f_3(\alpha) = \mathcal{O}_{\alpha \rightarrow 0}(\alpha^3)$$

pour déduire

$$-\mathbf{c}_s \partial_{z_1} \phi + \mathbf{c}_s^2 A = 0.$$

Ces deux contraintes n'en font qu'une :

$$\mathbf{c}_s A = \partial_{z_1} \phi, \quad (1.21)$$

et cela provient du fait que l'on a centré le repère sur l'onde se propageant vers la droite. Pour faire disparaître les termes singuliers, on calcule la somme de  $\mathbf{c}_s^{-1}$  fois la première équation de (1.20) et de  $\mathbf{c}_s^{-2}$  fois la dérivée par rapport à  $z_1$  de la seconde :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mathbf{c}_s} \partial_\tau \left( A_\varepsilon + \frac{\partial_{z_1} \phi_\varepsilon}{\mathbf{c}_s} \right) + 2 \frac{\partial_{z_1} \phi_\varepsilon}{\mathbf{c}_s} \partial_{z_1} A_\varepsilon + (1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon) \Delta_{z_\perp} \left( \frac{\phi_\varepsilon}{\mathbf{c}_s} \right) + A_\varepsilon \partial_{z_1} \left( \frac{\partial_{z_1} \phi_\varepsilon}{\mathbf{c}_s} \right) \\ & + 2 \frac{\partial_{z_1} \phi_\varepsilon}{\mathbf{c}_s} \partial_{z_1} \left( \frac{\partial_{z_1} \phi_\varepsilon}{\mathbf{c}_s} \right) + \left( 1 + \frac{4f''(1)}{\mathbf{c}_s^2} \right) A_\varepsilon \partial_{z_1} A_\varepsilon - \frac{1}{\mathbf{c}_s^2} \partial_{z_1} \left( \frac{\partial_{z_1}^2 A_\varepsilon + \varepsilon^2 \Delta_{z_\perp} A_\varepsilon}{1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon} \right) \\ & = -\frac{2\varepsilon^2}{\mathbf{c}_s} \nabla_{z_\perp} \phi_\varepsilon \cdot \nabla_{z_\perp} A_\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{\mathbf{c}_s^2} \partial_{z_1} \left( |\nabla_{z_\perp} \phi_\varepsilon|^2 \right) - \frac{1}{\varepsilon^4 \mathbf{c}_s^2} \partial_{z_1} [f_3(\varepsilon^2 A_\varepsilon)]. \end{aligned} \quad (1.22)$$

En utilisant la contrainte (1.21), que l'on peut ré-écrire

$$\phi/\mathbf{c}_s = \partial_{z_1}^{-1} A,$$

il est aisé de deviner la limite formelle  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans l'équation précédente puisqu'il n'y a plus de termes singuliers. On obtient l'équation de Korteweg-de Vries (KdV) (voir [40], [110]) en dimension  $d = 1$ , et l'équation de Kadomtsev-Petviashvili (KP-I) ([96]) en dimension supérieure

$$\frac{2}{\mathbf{c}_s} \partial_\tau A + \Gamma A \partial_{z_1} A - \frac{1}{\mathbf{c}_s^2} \partial_{z_1}^3 A + \Delta_{z_\perp} \partial_{z_1}^{-1} A = 0, \quad (\text{KdV})/(\text{KP-I})$$

avec un coefficient  $\Gamma$  lié à la nonlinéarité  $f$  à travers la formule :

$$\Gamma \equiv 6 + \frac{4}{\mathbf{c}_s^2} f''(1).$$

L'obtention de (KdV) et (KP-I) a déjà été justifiée pour des systèmes hyperboliques d'ordre un par W. Ben Youssef et T. Colin ([16]) pour (KdV) et W. Ben Youssef et D. Lannes ([17]) pour (KP). Plus récemment, cela a été justifié pour le problème des vagues par B. Alvarez-Samaniego et D. Lannes dans [8] (voir aussi [117] pour une relaxation de l'équation (KP) en un système faiblement transverse de type Boussinesq). Notons que pour le problème des vagues, on obtient en général l'équation de (KP-II)

$$\frac{2}{\mathbf{c}_s} \partial_\tau A + \Gamma A \partial_{z_1} A - \frac{1}{\mathbf{c}_s^2} \partial_{z_1}^3 A - \Delta_{z_\perp} \partial_{z_1}^{-1} A = 0, \quad (\text{KP-II})$$

avec le signe opposé pour le laplacien transverse, le cas (KP-I) correspondant à une très forte tension de surface (*i.e.* un film d'eau). On remarquera que les données initiales pour (NLS) sont encore plus petites, et le régime (KdV)/(KP-I) a lieu sur des intervalles de temps  $0 \leq \tau = \varepsilon^3 t \leq \tau_0$ , *i.e.*  $t \simeq \varepsilon^{-3}$ .

Pour ce qui concerne la littérature physique consacrée à l'obtention (formelle) de (KdV)/(KP-I) à partir de (NLS), mentionnons l'article [160] de V. Zakharov et A. Kuznetsov ; l'article de Y. Kivshar, D. Anderson et M. Lisak [101] ainsi que les articles de revue de Y. Kivshar et B. Luther-Davies [102] et Y. Kivshar et D. Pelinovsky [103] pour le contexte de l'optique non linéaire ; et enfin N. Berloff et P. Roberts dans [26] obtiennent le régime (KP-I) (en suivant les calculs de [95] pour les ondes progressives) dans le but de justifier l'instabilité dynamique des ondes de raréfaction en 3d (*cf.* chapitre 2).

Le flot (KdV)/(KP-I) préserve (au moins formellement) le moment

$$\mathcal{M}(\zeta) \equiv \int_{\mathbb{R}^d} \zeta^2 dz$$

et l'énergie

$$\mathcal{E}(\zeta) \equiv \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\mathbf{c}_s^2} (\partial_{z_1} \zeta)^2 + |\nabla_{z_\perp} \partial_{z_1}^{-1} \zeta|^2 + \frac{\Gamma}{3} \zeta^3 dz.$$

Bien sûr, (KdV) étant complètement intégrable, une infinité de lois de conservations existent, qui contrôlent la régularité Sobolev de la solution. Pour (KP-I) et (KP-II), il existe aussi une paire de Lax en dimension  $d = 2$ . Cependant, les lois de conservation associées à (KP-I) (*cf.* [136]) n'ont rapidement plus de sens dans un cadre naturel. En effet, à cause du terme de primitivation  $\partial_{z_1}^{-1}$ , les lois de conservation suivantes font intervenir des quantités avec  $\partial_{z_1}^{-2}, \partial_{z_1}^{-3}, \dots$

Nous allons nous tourner vers les justifications mathématiques de ces deux régimes asymptotiques. Dans ce qui suit, on considère  $A_\varepsilon^{\text{in}}$  et  $\phi_\varepsilon^{\text{in}}$  donnés et la condition initiale pour (NLS)

$$\Psi_\varepsilon^{\text{in}}(x) = (1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon^{\text{in}}(z)) \exp\left(i\varepsilon \phi_\varepsilon^{\text{in}}(z)\right), \quad z_1 = \varepsilon x_1, \quad z_\perp = \varepsilon^2 x_\perp.$$

On note  $\Psi_\varepsilon$  la solution de (NLS) associée.

### 1.3.1 Le cas intégrable de (GP) en dimension 1

Les deux articles de F. Béthuel, P. Gravejat, J.-C. Saut et D. Smets [32] et [33] envisagent cette limite (KdV) pour l'équation de Gross-Pitaevskii en dimension  $d = 1$  (où la vitesse du son vaut  $c_s = \sqrt{2}$  et  $\Gamma = 6$ )

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \partial_x^2 \Psi = \Psi(|\Psi|^2 - 1).$$

Le point crucial est que cette équation est complètement intégrable, tout comme (NLS) cubique 1d. Notons toutefois que la condition non nulle à l'infini perturbe malgré tout sensiblement l'analyse. L'article [32] détaille les premières lois de conservations de (GP) 1d et les exploite pour obtenir des bornes uniformes, en particulier sur l'hypothèse de préparation (1.21), puisqu'ils obtiennent ainsi une majoration du type

$$\|A_\varepsilon - \partial_z \phi_\varepsilon / \sqrt{2}\|_{H^3(\mathbb{R})} \leq C \left( \|A_\varepsilon^{\text{in}} - \partial_z \phi_\varepsilon^{\text{in}} / \sqrt{2}\|_{H^3(\mathbb{R})} + \varepsilon \right). \quad (1.23)$$

Le résultat essentiel de [32] est le suivant.

**Théorème 7** ([32]). *On suppose que  $d = 1$ ,  $f(\varrho) = \varrho - 1$  (donc (NLS) = (GP),  $c_s = \sqrt{2}$  et  $\Gamma = 6$ ) et que la donnée initiale vérifie*

$$\|A_\varepsilon^{\text{in}}\|_{H^3(\mathbb{R})} + \|\partial_z \phi_\varepsilon^{\text{in}} / \sqrt{2}\|_{H^3(\mathbb{R})} \leq M.$$

*Il existe  $\varepsilon_0(M) > 0$  tel que, si  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(M)$ ,  $\Psi_\varepsilon$  s'écrit*

$$\Psi_\varepsilon(t, x) = (1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon(\tau, z)) e^{i\varepsilon \phi_\varepsilon(\tau, z)}, \quad \tau = \varepsilon^3 t, \quad z = \varepsilon(x - \sqrt{2}t),$$

*et l'on a, pour tout  $\tau \geq 0$ ,*

$$\|A_\varepsilon(\tau) - \zeta_\varepsilon(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_M \left( \|A_\varepsilon^{\text{in}} - \partial_z \phi_\varepsilon^{\text{in}} / \sqrt{2}\|_{H^3(\mathbb{R})} + \varepsilon \right) e^{C_M \tau},$$

*où  $\zeta_\varepsilon$  désigne la solution de (KdV)*

$$2\sqrt{2}\partial_\tau \zeta + 12\zeta\partial_z \zeta - \partial_z^3 \zeta = 0$$

*avec donnée initiale*

$$(\zeta_\varepsilon)|_{\tau=0} = A_\varepsilon^{\text{in}}.$$

Le terme  $\|A_\varepsilon^{\text{in}} - \partial_z \phi_\varepsilon^{\text{in}} / \sqrt{2}\|_{H^3(\mathbb{R})}$  permet de contrôler la préparation des données (voir (1.21)) et donc l'onde se déplaçant vers la gauche. L'article [33] améliore le résultat précédent en prenant en compte les ondes se propageant vers la droite *et* vers la gauche. En particulier, le terme  $\varepsilon$  est remplacé par  $\varepsilon^2$ , mais il reste une hypothèse de préparation de type (1.21). L'erreur en  $\varepsilon$  n'est en effet pas naturelle puisque seul  $\varepsilon^2$  apparaît dans (1.20).

**Théorème 8** ([33]). *Soit  $s \in \mathbb{N}$  et  $0 < \varepsilon < 1$  donnés,  $d = 1$  et  $f(\varrho) = \varrho - 1$  (donc (NLS) = (GP),  $c_s = \sqrt{2}$  et  $\Gamma = 6$ ). On suppose que la donnée initiale satisfait*

$$\|A_\varepsilon^{\text{in}}\|_{H^{s+5}(\mathbb{R})} + \varepsilon \|\partial_z^{s+6} A_\varepsilon^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\partial_z \phi_\varepsilon^{\text{in}}\|_{H^{s+5}(\mathbb{R})} \leq K_0.$$

*Notons  $\mathcal{A}_\varepsilon$  et  $\mathcal{U}_\varepsilon$  les solutions de l'équation de (KdV)*

$$2\sqrt{2}\partial_\tau \zeta + 12\zeta\partial_z \zeta - \partial_z^3 \zeta = 0$$

*associées aux données initiales  $A_\varepsilon^{\text{in}}$  et  $\partial_z \phi_\varepsilon^{\text{in}} / \sqrt{2}$  respectivement. Si  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0(K_0, s)$ , alors  $\Psi_\varepsilon$  ne s'annule jamais et peut donc être écrite*

$$\Psi_\varepsilon(t, x) = (1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon(\tau, z)) e^{i\varepsilon \phi_\varepsilon(\tau, z)}, \quad \tau = \varepsilon^3 t, \quad z = \varepsilon(x - \sqrt{2}t).$$

*De plus, pour une constante  $K$  indépendante de  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,*

$$\|A_\varepsilon - \mathcal{A}_\varepsilon\|_{H^s(\mathbb{R})} + \left\| \frac{\partial_z \phi_\varepsilon}{\sqrt{2}} - \mathcal{U}_\varepsilon \right\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq K \left( \varepsilon^2 + \left\| A_\varepsilon^{\text{in}} - \frac{\partial_z \phi_\varepsilon^{\text{in}}}{\sqrt{2}} \right\|_{H^s(\mathbb{R})} \right) e^{K\tau}.$$

### 1.3.2 Régime (KdV) dans l'espace d'énergie

Pour le problème de Cauchy pour (KdV), nous utiliserons le résultat suivant pour des données  $H^1$ , bien qu'il existe des travaux (de J. Bourgain ou de C. Kenig, G. Ponce et L. Vega) pour une régularité Sobolev bien inférieure.

**Théorème 9** ([99]). *On considère le problème de Cauchy pour l'équation de (KdV)*

$$\frac{2}{\mathbf{c}_s} \partial_\tau \zeta + \Gamma \zeta \partial_z \zeta - \frac{1}{\mathbf{c}_s^2} \partial_z^3 \zeta = 0, \quad \zeta|_{\tau=0} = \zeta^{\text{in}}.$$

Si  $\zeta^{\text{in}} \in H^1(\mathbb{R})$ , alors il existe une unique solution de (KdV) satisfaisant  $\zeta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}))$  et  $\partial_z \zeta \in L^4_{loc}(\mathbb{R}_+, L^\infty(\mathbb{R}))$ . En outre,  $\|\zeta(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R})}$  ne dépend pas de  $\tau \in \mathbb{R}_+$ .

Notre premier résultat dans  $[\mathcal{A}_4]$  est un résultat de convergence dans l'espace d'énergie pour une nonlinéarité  $f$  assez générale (disons  $\mathcal{C}^3$  au voisinage de  $r_0^2 = 1$ ).

**Théorème 10.**  $[\mathcal{A}_4]$  Avec  $d = 1$ , supposons que l'on ait une famille de données initiales  $(A_\varepsilon^{\text{in}}, \phi_\varepsilon^{\text{in}})_{0 < \varepsilon < 1} \in H^1(\mathbb{R}) \times \dot{H}^1(\mathbb{R})$  qui vérifient

$$M \equiv \sup_{0 < \varepsilon < 1} \left\{ \|A_\varepsilon^{\text{in}}\|_{H^1(\mathbb{R})} + \frac{1}{\varepsilon} \left\| \frac{\partial_z \phi_\varepsilon^{\text{in}}}{\mathbf{c}_s} - A_\varepsilon^{\text{in}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \right\} < +\infty$$

et supposons que

$$A_\varepsilon^{\text{in}} \rightarrow A^{\text{in}} \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}) \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Alors, il existe  $\varepsilon_0 > 0$ , dépendant uniquement de  $M$ , tel que, pour  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , il existe deux fonctions réelles  $\phi_\varepsilon, A_\varepsilon \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  telles que  $(A_\varepsilon, \phi_\varepsilon)|_{\tau=0} = (A_\varepsilon^{\text{in}}, \phi_\varepsilon^{\text{in}})$  et

$$\Psi_\varepsilon(t, x) = (1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon(\tau, z)) \exp(i\varepsilon \phi_\varepsilon(\tau, z)), \quad z = \varepsilon(x - \mathbf{c}_s t), \quad \tau = \varepsilon^3 t$$

avec  $1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon \geq \frac{1}{2}$ . De plus, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , nous avons les convergences

$$A_\varepsilon \rightarrow \zeta \quad \text{dans } \mathcal{C}([0, T], H^s(\mathbb{R})), \quad \frac{\partial_z \phi_\varepsilon}{\mathbf{c}_s} \rightarrow \zeta, \quad \text{dans } \mathcal{C}([0, T], L^2(\mathbb{R}))$$

pour tous  $s < 1$  et  $T > 0$ , où  $\zeta$  est la solution  $H^1$  de (KdV) associée à la donnée initiale  $A^{\text{in}}$ .

On notera que la donnée initiale est bien préparée (voir (1.21)) au sens où

$$\|\partial_z \phi_\varepsilon^{\text{in}} / \mathbf{c}_s - A_\varepsilon^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

On ne peut pas avoir convergence dans  $H^1$  puisque la donnée initiale  $A_\varepsilon^{\text{in}}$  ne converge pas fortement dans  $H^1$ . Pour obtenir cette convergence  $H^1$ , il faut en outre faire l'hypothèse de préparation plus forte

$$\|\partial_z \phi_\varepsilon^{\text{in}} / \mathbf{c}_s - A_\varepsilon^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R})} = o(\varepsilon).$$

On a alors dans ce cas :

**Corollaire 1.**  $[\mathcal{A}_4]$  Sous les hypothèses du Théorème 10 et si on a en outre

$$A_\varepsilon^{\text{in}} \rightarrow A^{\text{in}} \quad \text{dans } H^1(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \|\partial_z \phi_\varepsilon^{\text{in}} / \mathbf{c}_s - A_\varepsilon^{\text{in}}\|_{L^2} = o(\varepsilon) \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0,$$

alors, pour tout  $T > 0$ , on a

$$A_\varepsilon \rightarrow \zeta \quad \text{dans } \mathcal{C}([0, T], H^1(\mathbb{R})) \quad \text{et} \quad \|\partial_z \phi_\varepsilon / \mathbf{c}_s - A_\varepsilon\|_{L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}))} = o(\varepsilon).$$

**Quelques idées sur la démonstration.** On peut tout d'abord noter que l'injection de Sobolev en dimension un  $H^1 \hookrightarrow L^\infty$  permet facilement de montrer que  $\Psi_\varepsilon$  ne s'annule jamais pour  $\varepsilon$  assez petit, car l'énergie est

conservée et petite. On exploite ensuite la conservation de l'énergie  $E$  et du moment  $P$ , ou plus exactement, en suivant [32], de l'expression  $\mathcal{F}_{\mathbf{c}_s} \equiv E - \mathbf{c}_s P$ , pour déduire les bornes uniformes

$$\sup_{0 < \varepsilon < 1} \left\{ \|A_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}))} + \frac{1}{\varepsilon} \left\| \frac{\partial_z \phi_\varepsilon}{\mathbf{c}_s} - A_\varepsilon \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}))} \right\} < +\infty.$$

En effet, avec l'ansatz (1.19), et après développement de Taylor du potentiel  $F$

$$\begin{aligned} E(\Psi_\varepsilon) &= \int_{\mathbb{R}} |\partial_x \Psi_\varepsilon|^2 + F(|\Psi_\varepsilon|^2) dx \\ &= \varepsilon^3 \int_{\mathbb{R}} (\partial_z \phi_\varepsilon)^2 \left(1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon\right)^2 + \varepsilon^2 (\partial_z A_\varepsilon)^2 + \mathbf{c}_s^2 A_\varepsilon^2 + \varepsilon^2 \mathbf{c}_s^2 \left(1 + \frac{4}{3\mathbf{c}_s^2} f''(1)\right) A_\varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^2 A_\varepsilon^4) dz, \end{aligned}$$

puis, en prenant l'expression

$$P(\Psi) = \int_{\mathbb{R}} (\rho - 1) \partial_z \phi dz$$

pour le moment (noter que les  $\Psi_\varepsilon$  qui nous intéressent sont de module  $\simeq r_0 = 1$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbf{c}_s}(\Psi_\varepsilon) &= E(\Psi_\varepsilon) - \mathbf{c}_s P(\Psi_\varepsilon) \\ &= \varepsilon^3 \int_{\mathbb{R}} (\partial_z \phi_\varepsilon)^2 \left(1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon\right)^2 + \varepsilon^2 (\partial_z A_\varepsilon)^2 + \mathbf{c}_s^2 A_\varepsilon^2 + \varepsilon^2 \mathbf{c}_s^2 \left(1 + \frac{4}{3\mathbf{c}_s^2} f''(1)\right) A_\varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4 A_\varepsilon^4) \\ &\quad - \mathbf{c}_s \left(2A_\varepsilon + \varepsilon^2 A_\varepsilon^2\right) \partial_z \phi_\varepsilon dz \\ &= \varepsilon^3 \int_{\mathbb{R}} \left(\partial_z \phi_\varepsilon - \mathbf{c}_s A_\varepsilon\right)^2 + \varepsilon^2 (\partial_z \phi_\varepsilon)^2 (2A_\varepsilon + \varepsilon^2 A_\varepsilon^2) + \varepsilon^2 (\partial_z A_\varepsilon)^2 + \varepsilon^2 \mathbf{c}_s^2 \left(1 + \frac{4}{3\mathbf{c}_s^2} f''(1)\right) A_\varepsilon^3 \\ &\quad + \mathcal{O}(\varepsilon^4 A_\varepsilon^4) - \mathbf{c}_s \varepsilon^2 A_\varepsilon^2 \partial_z \phi_\varepsilon dz. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Ici, on utilise l'identité remarquable  $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$  avec  $a = \partial_z \phi_\varepsilon$  et  $b = \mathbf{c}_s A_\varepsilon$ . Il paraît raisonnable que le contrôle  $L^2$  de  $A_\varepsilon$  et  $u_\varepsilon \equiv \mathbf{c}_s^{-1} \partial_z \phi_\varepsilon$  provienne de la conservation de l'énergie, et que la conservation de  $\mathcal{F}_{\mathbf{c}_s}(\Psi_\varepsilon)$  fournisse une borne  $L^2$  sur  $\partial_z A_\varepsilon$  et  $\varepsilon^{-1}(u_\varepsilon - A_\varepsilon)$ .

Une fois ces bornes établies, on utilise le fait que dans (1.20), les termes singuliers sont des termes de transport à coefficients constants  $\varepsilon^{-2} \gg 1$ . Il s'ensuit des bornes locales en  $(\tau, z)$ , puis de la compacité espace-temps pour  $\partial_z \phi_\varepsilon$  et  $A_\varepsilon$  dans  $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$  par un lemme de type Aubin-Lions. Ceci permet de passer à la limite faible dans l'équation sans terme singulier (1.22). Grâce à un résultat d'unicité fort-faible, ceci montre que  $A_\varepsilon \rightarrow \zeta$  localement en  $(\tau, z)$ . La convergence forte dans  $L^2(\mathbb{R})$  globalement en espace provient de la conservation de l'énergie et de la conservation de la norme  $L^2$  de la solution de (KdV), ce qui assure qu'il n'y a pas de perte de masse  $L^2$  à la limite. Les convergences fortes dans  $H^s$ ,  $0 \leq s < 1$ , viennent par interpolation. Pour la convergence  $H^1$  du corollaire, on utilise la conservation de l'énergie de (KdV) et celle de  $E - \mathbf{c}_s P$  pour justifier de manière analogue la non perte de masse  $H^1$  à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . En effet, on déduit de (1.24) que, formellement,

$$\frac{\mathcal{F}_{\mathbf{c}_s}(\Psi_\varepsilon)}{\varepsilon^5} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\partial_z \phi_\varepsilon - \mathbf{c}_s A_\varepsilon\right)^2 + (\partial_z A_\varepsilon)^2 + \left[2(\partial_z \phi_\varepsilon)^2 A_\varepsilon + \mathbf{c}_s^2 \left(1 + \frac{4}{3\mathbf{c}_s^2} f''(1)\right) A_\varepsilon^3 - \mathbf{c}_s A_\varepsilon^2 \partial_z \phi_\varepsilon\right] dz + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Autrement dit, vue la définition de  $\Gamma = 6 + 4f''(1)/\mathbf{c}_s^2$  et en supposant  $\mathbf{c}_s A_\varepsilon \simeq \partial_z \phi_\varepsilon$ ,

$$\frac{\mathcal{F}_{\mathbf{c}_s}(\Psi_\varepsilon)}{\varepsilon^5} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\partial_z \phi_\varepsilon - \mathbf{c}_s A_\varepsilon\right)^2 + (\partial_z A_\varepsilon)^2 + \frac{\Gamma}{3} A_\varepsilon^3 dz + o(1) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\partial_z \phi_\varepsilon - \mathbf{c}_s A_\varepsilon\right)^2 dz + \mathbf{c}_s^2 \mathcal{E}(A_\varepsilon) + o(1).$$

Ceci fait le lien entre l'énergie de (KdV) et les invariants  $E$  et  $P$  de (NLS), et l'on comprend que l'hypothèse  $A_\varepsilon - u_\varepsilon = o(\varepsilon)$  dans  $L^2$  permet de "voir" l'énergie de (KdV). Par ailleurs, on a

$$\frac{P(\Psi_\varepsilon)}{\varepsilon^3} = \int_{\mathbb{R}} (2A_\varepsilon + \varepsilon^2 A_\varepsilon^2) \partial_z \phi_\varepsilon dz = 2\mathbf{c}_s \int_{\mathbb{R}} A_\varepsilon^2 dz + o(1) = 2\mathbf{c}_s \mathcal{M}(A_\varepsilon) + o(1)$$

si  $\mathbf{c}_s A_\varepsilon \simeq \partial_z \phi_\varepsilon$ , d'où le lien entre les moments pour les deux équations. Noter que la considération de  $\mathcal{F}_{\mathbf{c}_s} = E - \mathbf{c}_s P$  fournit un contrôle  $L^2$  sur  $A_\varepsilon - u_\varepsilon$ . C'est en exploitant les trois paires de lois de conservation suivantes de (GP) que [32] établit (1.23). L'erreur en  $\varepsilon$  provenant du fait que la conservation de  $\mathcal{F}_{\mathbf{c}_s}(\Psi_\varepsilon)$  ne fournira au mieux que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\partial_z \phi_\varepsilon / \mathbf{c}_s - A_\varepsilon\right)^2 dz + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = Cte,$$

soit

$$\|\partial_z \phi_\varepsilon / \mathbf{c}_s - A_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \left( \|\partial_z \phi_\varepsilon^{\text{in}} / \mathbf{c}_s - A_\varepsilon^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R})} + \varepsilon \right).$$

### 1.3.3 Régime (KdV)/(KP-I) dans des normes régulières

Ici, la dimension  $d$  est quelconque, et nous travaillons avec des normes  $H^s$  avec  $s$  suffisamment grand. Remarquons que pour une donnée initiale  $\zeta^{\text{in}}$  dans  $H^s$  avec  $s > 1 + d/2$ , le problème de Cauchy pour l'équation de (KdV)/(KP-I)

$$\frac{2}{\mathbf{c}_s} \partial_\tau \zeta + \Gamma \zeta \partial_{z_1} \zeta - \frac{1}{\mathbf{c}_s^2} \partial_{z_1}^3 \zeta + \Delta_{z_\perp} \partial_{z_1}^{-1} \zeta = 0$$

est localement bien posé : il existe une unique  $\zeta \in L^\infty([0, T_*], H^s)$  solution faible (au sens des distributions) locale en temps dans  $H^s$  (si  $d \geq 2$ , cela peut se voir en faisant une régularisation en coupant les basses-fréquences dans l'équation et en passant à la limite). D'après [88], la solution  $\zeta$  est continue en temps dès que  $\zeta^{\text{in}} \in \partial_{z_1} H^s$ . Bien sûr, le problème de Cauchy est bien posé dans des espaces de régularité bien inférieure : voir [135], [86] en dimension  $d = 2$ . Si  $d = 3$ , on peut avoir explosion de la solution de (KP-I) (pour la quantité  $\|\nabla_{z_\perp} \partial_{z_1}^{-1} \zeta\|_{L^2}$ ) en temps fini (*cf.* [125]).

Notre premier résultat est le suivant.

**Théorème 11.** [A<sub>4</sub>] *Soit  $d \geq 1$  et  $s \in \mathbb{N}$  tel que  $s > 1 + \frac{d}{2}$ . On se donne une famille de données initiales vérifiant*

$$M_s \equiv \sup_{0 < \varepsilon < 1} \|(A_\varepsilon^{\text{in}}, \partial_{z_1} \phi_\varepsilon^{\text{in}}, \varepsilon \nabla_{z_\perp} \phi_\varepsilon^{\text{in}})\|_{H^{s+1}(\mathbb{R}^d)} < +\infty.$$

*Alors, il existe  $T > 0$  et  $0 < \varepsilon_0 < 1$ , dépendant de  $M_s$ , tels que, si  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , il existe deux fonctions réelles  $A_\varepsilon \in \mathcal{C}([0, T], H^{s+1}(\mathbb{R}^d))$  et  $\phi_\varepsilon \in \mathcal{C}([0, T], \dot{H}^{s+1}(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$  telles que  $(A_\varepsilon, \phi_\varepsilon)|_{\tau=0} = (A_\varepsilon^{\text{in}}, \phi_\varepsilon^{\text{in}})$  et, pour  $0 \leq \tau \leq T$ ,*

$$\Psi_\varepsilon(t, x) = (1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon(\tau, z)) \exp(i\varepsilon \phi_\varepsilon(\tau, z)), \quad z_1 = \varepsilon(x_1 - \mathbf{c}_s t), \quad z_\perp = \varepsilon^2 x_\perp, \quad \tau = \varepsilon^3 t$$

*avec  $1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon \geq 1/2$  et*

$$\sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \tau \in [0, T]} \left\{ \|A_\varepsilon\|_{H^{s+1}(\mathbb{R}^d)} + \|(\partial_{z_1} \phi_\varepsilon, \varepsilon \nabla_{z_\perp} \phi_\varepsilon)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \right\} < +\infty.$$

*On suppose en outre qu'il existe deux fonctions  $(A^{\text{in}}, \phi^{\text{in}}) \in H^{s+1}(\mathbb{R}^d)$  telles que*

$$(A_\varepsilon^{\text{in}}, \partial_{z_1} \phi_\varepsilon^{\text{in}}, \varepsilon \nabla_{z_\perp} \phi_\varepsilon^{\text{in}}) \rightarrow (A^{\text{in}}, \partial_{z_1} \phi^{\text{in}}, 0) \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^d)$$

*et soit  $\zeta$  la solution (faible) de (KdV)/(KP-I) avec donnée initiale*

$$\zeta|_{\tau=0} = \frac{1}{2} \left( A^{\text{in}} + \frac{\partial_{z_1} \phi^{\text{in}}}{\mathbf{c}_s} \right) \in H^s(\mathbb{R}^d).$$

*Alors, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , nous avons les convergences fortes*

$$\frac{1}{2} \left( A_\varepsilon + \frac{\partial_{z_1} \phi_\varepsilon}{\mathbf{c}_s} \right) \rightarrow \zeta \quad \text{dans } L^2([0, T], H^\sigma(\mathbb{R}^d)) \quad \forall \sigma < s$$

*et les convergences faibles*

$$A_\varepsilon \rightharpoonup \zeta \quad \frac{\partial_{z_1} \phi_\varepsilon}{\mathbf{c}_s} \rightharpoonup \zeta \quad \text{faiblement dans } L^2([0, T] \times \mathbb{R}^d).$$

En dimension  $d = 1$ , les estimations  $H^s$  uniformes sont semblables à celles de [28], mais en dimension supérieure, ce n'est plus le cas à cause de l'anisotropie du changement d'échelle (en variable transverse). Le théorème fournit la borne inférieure  $T \geq C/M_s$  sur le temps  $T$ , et en général, il n'est pas certain que l'on puisse améliorer ce temps par les propriétés dispersives. En effet, en dimension 3, il peut y avoir explosion en temps fini (*cf.* [125]). Lorsque  $d = 2$ , une piste serait d'améliorer ce temps  $T$  en travaillant dans l'espace d'énergie de (KP-I) en utilisant les techniques de [86]. Les convergences sont forcément intégrales en temps puisque l'on ne tient pas compte, à ce stade, de l'onde se propageant en sens inverse, car il n'y a pas d'hypothèse de préparation des données. Nous pouvons cependant améliorer les convergences dans le cas de données bien préparées :

**Théorème 12.**  $[A_4]$  *Sous les hypothèses du théorème 11, et en supposant de plus que*

$$\|\nabla_{z_\perp} \phi_\varepsilon^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \mathcal{O}(1) \quad \text{et} \quad \begin{cases} (d=1) & \|\partial_{z_1} \phi_\varepsilon^{\text{in}}/\mathbf{c}_s - A_\varepsilon^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow 0 \\ (d \geq 2) & \|\partial_{z_1} \phi_\varepsilon^{\text{in}}/\mathbf{c}_s - A_\varepsilon^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \mathcal{O}(\varepsilon) \end{cases} \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.25)$$

alors, nous avons les convergences fortes

$$A_\varepsilon \rightarrow \zeta \quad \text{dans } \mathcal{C}([0, T], H^{\sigma+1}(\mathbb{R}^d)), \quad \frac{\partial_{z_1} \phi_\varepsilon}{\mathbf{c}_s} \rightarrow \zeta \quad \text{dans } \mathcal{C}([0, T], H^\sigma(\mathbb{R}^d))$$

pour tout  $\sigma < s$ . En outre, si  $d \geq 2$ , il existe  $K > 0$  tel que, pour  $0 \leq \tau \leq T$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_{z_\perp} \phi_\varepsilon|^2 dz \leq K. \quad (1.26)$$

On notera que les hypothèses de préparation (1.25) dépendent de la dimension pour permettre de prouver (1.26). En dimension  $d = 1$ , elle est plus faible que l'hypothèse du théorème 10.

**Un mot sur la démonstration.** Pour le théorème 11, les bornes uniformes ont été établies par l'emploi de l'écriture de (NLS) sous la forme proposée par E. Grenier, c'est-à-dire en écrivant  $\Psi_\varepsilon = A_\varepsilon \exp(i\varepsilon\Theta_\varepsilon)$  avec  $A_\varepsilon$  à valeurs complexes, et décomposant (NLS) sous la forme d'un système hyperbolique symétrisable en variables  $(A_\varepsilon, \partial_{z_1} \Theta_\varepsilon/\mathbf{c}_s, \varepsilon \nabla_{z_\perp} \Theta_\varepsilon/\mathbf{c}_s)$ . En effet, puisque l'on cherche des solutions de module proche de  $r_0 = 1$ , et que  $f'(1) > 0$  par hypothèse, le symétriseur  $S(\varrho) = \text{Diag} \left( Id_{\mathbb{C}}, \frac{1}{2f'(\varrho)} Id_{\mathbb{R}^d} \right)$  reste toujours défini positif. On notera que les termes singuliers dans (1.20) sont à coefficients constants, donc on peut suivre les travaux [149], [106], [77] pour obtenir les bornes sur un intervalle de temps  $[0, T]$ , avec  $T > 0$  indépendant de  $\varepsilon$ . Pour les convergences, on se base une fois encore sur le développement (1.24), mais en incluant la variable transverse

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbf{c}_s}(\Psi_\varepsilon) &= E(\Psi_\varepsilon) - \mathbf{c}_s P(\Psi_\varepsilon) \\ &= \varepsilon^{5-2d} \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_{z_1} \phi_\varepsilon)^2 (1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon)^2 + \varepsilon^2 (\partial_{z_1} A_\varepsilon)^2 + \mathbf{c}_s^2 A_\varepsilon^2 + \varepsilon^2 \mathbf{c}_s^2 \left(1 + \frac{4}{3\mathbf{c}_s^2} f''(1)\right) A_\varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4 A_\varepsilon^4) \\ &\quad - \mathbf{c}_s \left(2A_\varepsilon + \varepsilon^2 A_\varepsilon^2\right) \partial_z \phi_\varepsilon + \varepsilon^2 |\nabla_{z_\perp} \phi_\varepsilon|^2 (1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon)^2 + \varepsilon^4 |\nabla_{z_\perp} A_\varepsilon|^2 dz \\ &= \varepsilon^{7-2d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\varepsilon^2} (\partial_z \phi_\varepsilon - \mathbf{c}_s A_\varepsilon)^2 + |\nabla_{z_\perp} \phi_\varepsilon|^2 + (\partial_{z_1} A_\varepsilon)^2 \\ &\quad + \left[2A_\varepsilon (\partial_{z_1} \phi_\varepsilon)^2 + \mathbf{c}_s^2 \left(1 + \frac{4}{3\mathbf{c}_s^2} f''(1)\right) A_\varepsilon^3 - \mathbf{c}_s A_\varepsilon^2 \partial_z \phi_\varepsilon\right] dz + \mathcal{O}(\varepsilon^{9-2d}). \end{aligned}$$

Dès lors, l'hypothèse de préparation plus forte pour  $d \geq 2$

$$\|\partial_{z_1} \phi_\varepsilon^{\text{in}}/\mathbf{c}_s - A_\varepsilon^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

permet d'avoir un contrôle  $L^2$  sur  $\nabla_{z_\perp} \phi_\varepsilon$ .

## 1.4 Perspectives et travaux en cours

**Bornes d'erreur sur l'approximation (KdV)/(KP-I).** Au vu des résultats de comparaison obtenus par F. Béthuel, P. Gravejat, J.-C. Saut et D. Smets dans [32] et [33], il est naturel d'essayer de les étendre à une nonlinéarité  $f$  plus générale et une dimension  $d$  quelconque. Une première remarque est que l'hypothèse de masse nulle ( $\int_{\mathbb{R}} A(z_1, z_\perp) dz_1 = 0$  pour tout  $z_\perp$ ) qui permet de définir le terme  $\partial_{z_1}^{-1} A$ , est nécessaire pour prouver rigoureusement un résultat de consistance de l'approximation, comme le montre D. Lannes dans [116]. Cependant, cette hypothèse de masse nulle n'est pas naturelle du point de vue physique. D'après les travaux de D. Lannes et J.-C. Saut [117], il apparaît qu'il vaut mieux employer un système de Boussinesq faiblement transverse que (KP-I). En effet, ce système, bien que formellement équivalent à (KP-I), présente l'avantage de ne pas requérir cette hypothèse de masse nulle, et d'être un système pour lequel on peut établir des bornes d'erreur naturelles (en  $\varepsilon^2$  dans notre contexte) avec le système de départ.



Dans cette direction, nous avons déjà déterminé un tel système de Boussinesq faiblement transverse, qui est hyperbolique symétrisable, et pour lequel on établit une borne d'erreur en  $\varepsilon^2$ . Lorsqu'on l'envisage en dimension 1, on montre également un résultat d'approximation par (KdV) avec une borne en  $\varepsilon^2$  aussi. On obtient ainsi un résultat tout à fait semblable à celui de [33] (mais sur un intervalle en  $\tau$  borné) en travaillant uniquement avec des systèmes hyperboliques symétrisables où les termes singuliers sont à coefficients constants.

**Obtention formelle de (gKdV) et (gKP-I).** Dans la limite (KdV)/(KP-I), lorsque  $\Gamma = 0$ , l'équation limite devient linéaire. Afin de voir les effets nonlinéaires, il est naturel d'augmenter la taille des données. Lorsque  $\Gamma = 0$ , le choix naturel est

$$\Psi(t, x) = \left(1 + \varepsilon A_\varepsilon(\tau, z)\right) \exp(i\phi_\varepsilon(\tau, z)) \quad \tau = \varepsilon^3 t, \quad z_1 \equiv \varepsilon(x_1 - \mathbf{c}_s t), \quad z_\perp \equiv \varepsilon^2 x_\perp. \quad (1.27)$$

Lorsque l'on insère ceci dans (NLS) ou le système de Madelung, on trouve

$$\begin{cases} \partial_\tau A_\varepsilon - \frac{\mathbf{c}_s}{\varepsilon^2} \partial_{z_1} A_\varepsilon + \frac{2}{\varepsilon} \partial_{z_1} \phi_\varepsilon \partial_{z_1} A_\varepsilon + 2\varepsilon \nabla_{z_\perp} \phi_\varepsilon \cdot \nabla_{z_\perp} A_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} (1 + \varepsilon A_\varepsilon) \left( \partial_{z_1}^2 \phi_\varepsilon + \varepsilon^2 \Delta_{z_\perp} \phi_\varepsilon \right) = 0 \\ \partial_\tau \phi_\varepsilon - \frac{\mathbf{c}_s}{\varepsilon^2} \partial_{z_1} \phi_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (\partial_{z_1} \phi_\varepsilon)^2 + \varepsilon |\nabla_{z_\perp} \phi_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon^3} f \left( (1 + \varepsilon A_\varepsilon)^2 \right) - \frac{\partial_{z_1}^2 A_\varepsilon + \varepsilon^2 \Delta_{z_\perp} A_\varepsilon}{1 + \varepsilon A_\varepsilon} = 0. \end{cases} \quad (1.28)$$

En particulier, on notera l'apparition de termes singuliers en  $\varepsilon^{-1}$  qui ne sont pas à coefficients constants. Il s'ensuit que la contrainte de préparation à l'ordre dominant

$$\mathbf{c}_s A = \partial_{z_1} \phi$$

ne sera pas suffisante pour l'établissement des bornes uniformes, mais qu'il faut aller un cran plus loin. On notera que comme  $\Gamma = 0$ , on a  $f''(1) = -3\mathbf{c}_s^2/2$ , et le développement de la nonlinéarité  $f$  s'écrit alors

$$\begin{aligned} f\left((1 + \alpha)^2\right) &= \mathbf{c}_s^2 \alpha + \left(\frac{\mathbf{c}_s^2}{2} + 2f''(1)\right) \alpha^2 + \left(2f''(1) + \frac{4}{3}f'''(1)\right) \alpha^3 + \mathcal{O}(\alpha^4) \\ &= \mathbf{c}_s^2 \left[ \alpha - \frac{5}{2} \alpha^2 + \left(\frac{4}{3}f'''(1) - 3\right) \alpha^3 + \mathcal{O}(\alpha^4) \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent, les termes singuliers dans le système de Madelung, à savoir

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^2} \left( \partial_{z_1}^2 \phi_\varepsilon - \mathbf{c}_s \partial_{z_1} A_\varepsilon \right) + \frac{1}{\varepsilon} \left( 2\partial_{z_1} \phi_\varepsilon \partial_{z_1} A_\varepsilon + A_\varepsilon \partial_{z_1}^2 \phi_\varepsilon \right) = \mathcal{O}(1) \\ \frac{\mathbf{c}_s}{\varepsilon^2} \left( \mathbf{c}_s A_\varepsilon - \partial_{z_1} \phi_\varepsilon \right) + \frac{1}{\varepsilon} \left( (\partial_{z_1} \phi_\varepsilon)^2 - \frac{5\mathbf{c}_s^2}{2} A_\varepsilon^2 \right) = \mathcal{O}(1), \end{cases}$$

se réduisent à une seule contrainte de préparation non linéaire

$$\frac{\partial_{z_1} \phi_\varepsilon}{\mathbf{c}_s} - A_\varepsilon = -\frac{3\varepsilon}{2} A_\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (1.29)$$

En additionnant ici encore la première équation de (1.28) à  $\mathbf{c}_s^{-2} \partial_{z_1}$  fois la dérivée de la seconde, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathbf{c}_s} \partial_\tau \left( A_\varepsilon + \frac{1}{\mathbf{c}_s} \partial_{z_1} \phi_\varepsilon \right) - \frac{1}{\mathbf{c}_s^2} \partial_{z_1} \left( \frac{\partial_{z_1}^2 A_\varepsilon + \varepsilon^2 \Delta_{z_\perp} A_\varepsilon}{1 + \varepsilon A_\varepsilon} \right) + (1 + \varepsilon A_\varepsilon) \Delta_{z_\perp} \phi_\varepsilon + \frac{1}{\mathbf{c}_s^2} \left( -9\mathbf{c}_s^2 + 4f'''(1) \right) A_\varepsilon^2 \partial_{z_1} A_\varepsilon \\ + \frac{1}{\varepsilon} \left\{ 2\partial_{z_1} \phi_\varepsilon \partial_{z_1} A_\varepsilon + A_\varepsilon \partial_{z_1}^2 \phi_\varepsilon + \frac{1}{\mathbf{c}_s} \partial_{z_1} [(\partial_{z_1} \phi_\varepsilon)^2] - \frac{5\mathbf{c}_s}{2} \partial_{z_1} (A_\varepsilon^2) \right\} \\ = -\frac{2\varepsilon}{\mathbf{c}_s} \nabla_{z_\perp} \phi_\varepsilon \cdot \nabla_{z_\perp} A_\varepsilon - \frac{\varepsilon}{\mathbf{c}_s^2} \partial_{z_1} [|\nabla_{z_\perp} \phi_\varepsilon|^2] - \partial_{z_1} [\mathcal{O}(\varepsilon A_\varepsilon^4)]. \end{aligned}$$

On voit que la seconde ligne est formellement en  $\varepsilon^{-1}$ , mais qu'avec  $\partial_{z_1} \phi_\varepsilon / \mathbf{c}_s - A_\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon)$ , cette singularité disparaît. Toutefois, pour connaître le terme en  $\varepsilon^0$  dans cette expression, il nous faut avoir le développement (1.29) jusqu'à  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ , et l'on voit alors que la seconde ligne vaut  $-15A_\varepsilon^2 \partial_{z_1} A_\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon)$ . Par suite, la limite formelle du système précédent devient l'équation de (KdV)/(KP-I) *cubique*

$$\frac{2}{\mathbf{c}_s} \partial_\tau A - \frac{1}{\mathbf{c}_s^2} \partial_{z_1}^3 A + \Gamma' A^2 \partial_{z_1} A + \Delta_{z_\perp} \partial_{z_1}^{-1} A = 0, \quad (\text{KdV}')/(\text{KP}'\text{-I})$$

où le coefficient

$$\Gamma' \equiv \frac{4f'''(1)}{c_s^2} - 24$$

contient une dérivée troisième de  $f$  en 1. Nous ne connaissons pas de référence dans la littérature physique pour un tel calcul formel. Toutefois, pour un modèle de matériau ferro-magnétique “planaire” (une équation de type Landau-Lifschitz se ramenant par projection stéréographique à une équation de type Schrödinger non linéaire), N. Papanicolaou et P. Spathis [140] ont dérivé pour les ondes progressives une équation limite (KP-I) cubique par développement en  $\varepsilon$  de la solution, ce qui donne un calcul très similaire. On peut bien sûr pousser plus loin et obtenir (gKdV)/(gKP-I) en supposant que les coefficients comme  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$ , ... s’annulent.

La justification mathématique de ces régimes (gKdV)/(gKP-I) est particulièrement intéressante, car maintenant, il y a des termes singuliers en  $\varepsilon^{-1}$  qui ne sont pas à coefficients constants. Les techniques hyperboliques nécessitent donc d’être adaptées, afin de tenir compte de la préparation non linéaire (1.29). Malgré nos efforts, nous n’avons pas pu surmonter le caractère nettement plus non linéaire de ce problème. La difficulté est qu’il faut travailler en même temps sur la préparation (1.29) et l’obtention des bornes uniformes. On notera aussi que pour (KdV) cubique, les données sont comme celles pour le régime onde : le régime que l’on cherche correspond donc à des solutions non linéaires de l’équation des ondes qui existeraient sur un temps très long.

À défaut, si les techniques hyperboliques ne marchent pas, un moyen de justifier ce régime est de travailler dans un espace de fonctions analytiques comme ceux utilisés dans [84] par N. Hayashi et J-C. Saut, par exemple. Dans ce cas, on n’utilise pas du tout la structure hyperbolique, mais on résout l’équation par un point fixe tenant compte de la préparation (1.29).

**Le modèle d’Euler-Korteweg.** Le modèle d’Euler-Korteweg pour les fluides capillaires s’écrit

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho v) = 0 \\ \partial_t v + (v \cdot \nabla)v = \nabla \left( F_0'(\varrho) + \frac{1}{2} K'(\varrho) |\nabla \varrho|^2 + K(\varrho) \Delta \varrho \right), \end{cases} \quad (\text{EK})$$

où  $K$  et  $F_0$  sont des fonctions de  $\varrho$ , avec  $K$  régulière pour  $\varrho > 0$ . On renvoie à l’article de revue [18] de S. Benzoni-Gavage pour les résultats récents pour ce modèle. L’énergie de ce système s’écrit

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varrho |u|^2 + K(\varrho) |\nabla \varrho|^2 + 2F_0(\varrho) \, dx.$$

Lorsque

$$K(\varrho) = \frac{1}{4\varrho},$$

le système (EK) est exactement le système de Madelung obtenu à partir de l’équation de Schrödinger non linéaire

$$i\partial_t \Psi + \frac{1}{2} \Delta \Psi = F_0'(|\Psi|^2) \Psi,$$

où la nonlinéarité  $f$  est la fonction  $F_0'$  qui peut être par exemple telle que le potentiel  $F_0$  présente une structure double puits. Pour ce qui concerne le caractère bien posé dans des espaces type Sobolev  $H^s$ , on renvoie au résultat de S. Benzoni-Gavage, S. Descombes et R. Danchin [19] (pour des données ayant une densité  $\varrho$  minorée par une constante strictement positive), qui repose sur un système augmenté. Il serait très intéressant d’étendre les résultats précédents au système (EK). Remarquons que pour le régime onde, la démonstration de [28] utilise la méthode du système augmenté de [19], et il est donc possible que les régimes onde et (KdV)/(KP-I) puissent être généralisés au système (EK).

**Interaction onde-vortex.** L’équation de Schrödinger peut posséder, en dimension  $d = 2$ , des solutions stationnaires particulières, d’énergie infinie que sont les vortex. C’est le cas de l’équation de Gross-Pitaevskii, par exemple. Les vortex sont des solutions du type (en coordonnées polaires)  $V_n(x) = f_n(r) e^{in\theta}$ , où  $n$  est un entier relatif non nul et  $f_n$  est une fonction sur  $\mathbb{R}_+$  qui croît de 0 à 1 =  $r_0$ . Les fonctions  $V_n(x/\varepsilon)$  sont à rapprocher des vortex d’Euler lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  via la transformation de Madelung : le carré du module  $\varrho$  tend vers 1 =  $r_0$  et le rotationnel de la densité du moment  $\varrho v$  converge vers une masse de Dirac  $2\pi n \delta_{x=0}$ . Étant donnée une configuration dans le plan de vortex situés à grande distance les uns des autres (longueur caractéristique  $\ell \gg 1$ ), la dynamique de ces vortex dans (NLS) sur l’échelle de temps  $\ell$  est bien connue et gouvernée par la loi de Kirchhoff

pour les points vortex (pour les justifications, voir, par exemple, [35] et les références qui y sont citées). Par exemple, deux vortex avec  $n = 1$  tournent autour de leur centre de gravité à vitesse constante. Sur une plus longue échelle de temps, il faut tenir compte des ondes émises par les vortex. Dans la configuration des deux vortex avec  $n = 1$ , cela a l'effet de les éloigner très, très lentement l'un de l'autre, et d'envoyer des ondes à l'infini, ce qui assure la préservation de l'"énergie" (bien qu'elle soit infinie). Pour des arguments théoriques, on pourra regarder [139] et [111], et [157] pour une étude numérique. Les arguments théoriques sont dans les deux cas justement basés sur le principe de conservation d'énergie pour déterminer la vitesse d'éloignement des deux vortex.

La justification de cette intéressante dynamique n'est probablement pas accessible de suite. Pour des résultats mathématiques, l'argument énergétique sera insuffisant (dès qu'il y aura plus de vortex, par exemple) et il faudra analyser finement l'équation de Schrödinger et séparer convenablement la partie vortex et la partie onde. En effet, si l'on veut attaquer le problème en établissant la stabilité d'une solution approchée, étant donné que la perturbation est *très* faible, il nous faut une solution approchée à un ordre très élevé. Un problème plus simple pourrait être d'envisager l'interaction d'un seul vortex avec une onde, par exemple une onde plane. Pour ce problème, on pourra se référer au livre de L.M. Pismen [143].



# Chapitre 2

## Ondes progressives

*Les articles associés à ce chapitre sont d'une part deux travaux en collaboration avec Mihai Mariş :*

[A<sub>8</sub>] D. CHIRON ET M. MARIŞ,  
Traveling waves for Nonlinear Schrödinger Equation with nonzero condition at infinity. II.  
*Prépublication.*

[A<sub>7</sub>] D. CHIRON ET M. MARIŞ,  
Rarefaction pulses for the Nonlinear Schrödinger Equation in the transonic limit.  
*Prépublication, soumis à Comm. Math. Phys.*

*ainsi que l'article :*

[A<sub>8</sub>] D. CHIRON,  
Travelling waves for the Nonlinear Schrödinger Equation with general nonlinearity in dimension one.  
*Prépublication, soumis à Nonlinearity.*

\*\*\*\*\*

Pour l'équation (NLS)

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Delta \Psi = \Psi f(|\Psi|^2),$$

une onde progressive de vitesse  $c \in \mathbb{R}$  se propageant dans la direction  $x_1$  (ce que l'on peut supposer quitte à effectuer une rotation des axes) est une solution particulière de (NLS) du type

$$\Psi(t, x) = U(x_1 - ct, x_2, \dots, x_d),$$

où le profil  $U$  doit donc résoudre l'e.d.p. elliptique

$$\Delta U = U f(|U|^2) + ic \partial_{x_1} U. \quad (\text{TW}_c)$$

Si  $r_0 = 0$  et lorsque l'on se restreint à une nonlinéarité homogène  $f(\varrho) = \pm \varrho^\sigma$  ( $\sigma \in \mathbb{N}$ ), il n'y a pas d'onde progressive dans le cas défocalisant (signe +) et une onde stationnaire (le soliton) dans le cas focalisant (signe -). Lorsque l'on considère une nonlinéarité  $f$  générale avec donnée non nulle à l'infini

$$|\Psi(t, x)| \rightarrow r_0 > 0 \quad \text{quand} \quad |x| \rightarrow +\infty,$$

avec la condition de type défocalisante  $f'(r_0^2) > 0$ , la vitesse du son

$$c_s \equiv \sqrt{2r_0^2 f'(r_0^2)} > 0$$

déjà introduite lorsque l'on a mentionné le régime onde linéaire (voir Chapitre 1) intervient de manière cruciale puisque l'on attend en général des ondes progressives pour les vitesses *subsoniques*. Nous allons étudier ces

ondes progressives avec la condition à l'infini  $|U| \rightarrow r_0$ , avec  $r_0 > 0$ . Ces ondes sont supposées jouer un rôle important dans la dynamique en temps long de (NLS) lorsque  $r_0 > 0$ . Quitte à conjuguer l'équation (TW<sub>c</sub>), on peut toujours supposer  $c \geq 0$ . On exclura les ondes "triviales" comme les constantes de module  $r_0$ , les fonctions  $r_0 e^{icx_1 + i\theta}$  (avec  $\theta \in \mathbb{R}$  constant), ou encore les solutions qui ne dépendent que d'au plus  $d - 1$  variables. Dans ce chapitre, la composante du moment  $\vec{P}$  dans la direction de propagation  $x_1$  sera notée  $P$ .

Une étude systématique des propriétés de ces ondes dans le cas de l'équation de Gross-Pitaevskii ( $f(\varrho) = \varrho - 1$ ) a été menée par P. Roberts et plusieurs collaborateurs dans une série d'articles "Motion in a Bose condensate" (de I à X), parmi lesquels on peut citer [95], [94], [26]. On pourra aussi regarder [87].

Ces travaux dégagent plusieurs conjectures, dont certaines ont déjà été justifiées mathématiquement. On rappelle que le contexte est celui de (GP) (où  $\mathbf{c}_s = \sqrt{2}$ ). Voici quatre de ces conjectures, valables en dimensions  $d = 2$  et  $d = 3$ . Le cas mono-dimensionnel est plus spécifique et sera envisagé ultérieurement.

- Des ondes existent pour les vitesses  $0 < c < \mathbf{c}_s$ .
- Ces ondes ont une décroissance algébrique à l'infini explicite.
- Il n'existe pas d'onde pour  $c = 0$  ou  $c \geq \mathbf{c}_s$ .
- Les diagrammes énergie-moment pour ces solutions sont les suivants (la ligne pointillée rouge est la droite  $E = \mathbf{c}_s P = \sqrt{2}P$ ) :

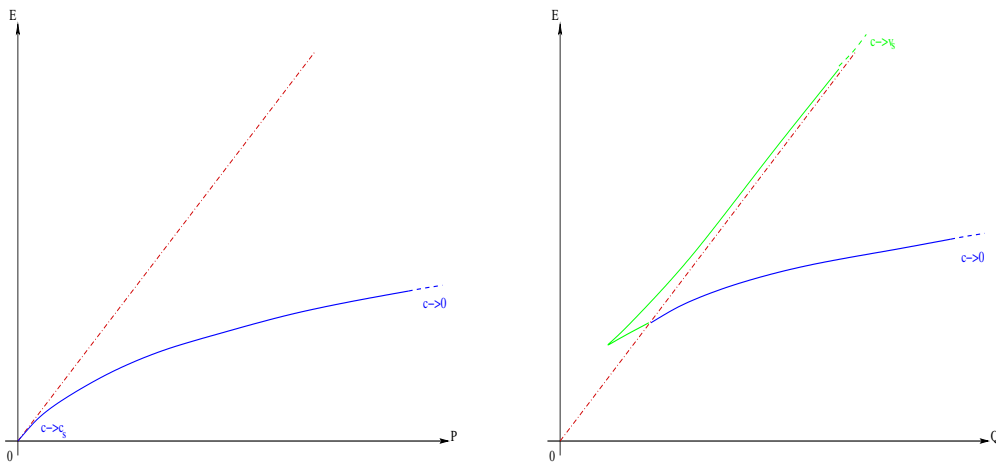


FIGURE 2.1 – Diagrammes  $(E, P)$  pour (GP) : (a) dimension  $d = 2$ ; (b) dimension  $d = 3$

Qualitativement, les ondes progressives ont des vortex (la fonction d'onde  $\Psi$  s'annule en deux points ( $d = 2$ ) ou sur un cercle ( $d = 3$ )) quand  $c$  est petit, et ressemblent à des ondes de raréfaction pour  $c \simeq \mathbf{c}_s$ , c'est-à-dire que le module de la fonction d'onde tend uniformément vers  $r_0$ , avec une asymptotique donnée par l'équation de Kadomtsev-Petviashvili (voir plus loin). Il est de plus attendu que ces ondes vérifient la relation de groupe d'Hamilton (où la dérivée est calculée le long de la courbe)

$$c = \frac{dE}{dP},$$

autrement dit que la vitesse de l'onde soit égale à la pente de la courbe  $P \mapsto E$ . Dès lors que l'on sait que l'onde progressive  $U_c$  dépend de façon régulière du paramètre  $c$ , cette identité provient de la multiplication de (TW<sub>c</sub>) par  $\frac{dU_c}{dc}$ . Pour ce qui concerne la stabilité orbitale de ces ondes, un argument (formel) classique et général donne

$$\begin{cases} \text{stabilité si } \frac{dP}{dc} < 0, & \text{soit } \frac{d^2E}{dP^2} < 0; \\ \text{instabilité si } \frac{dP}{dc} > 0, & \text{soit } \frac{d^2E}{dP^2} > 0. \end{cases}$$

Cela veut dire qu'en un point où la courbe  $P \mapsto E$  est concave, l'onde progressive associée est stable, et qu'en un point où la courbe  $P \mapsto E$  est convexe, l'onde progressive associée est instable. Cela signifie sur le diagramme

énergie-moment de la figure 2.1 que les ondes en dimension  $d = 2$  sont stables, et qu'en dimension  $d = 3$ , les ondes de la partie inférieure sont stables, mais celles de la partie supérieure instables. Ce critère est détaillé dans l'article de C. Jones, S. Puterman et P. Roberts [94] et a été justifié dans les travaux de J. Shatah (voir [150], [151]) pour certaines équations, et donné dans un cadre plus général dans l'article de M. Grillakis, J. Shatah et W. Strauss [81].

Il est enfin classique que les solutions de  $(TW_c)$  (dans un espace fonctionnel adapté à l'énergie et à la condition à l'infini) vérifient les identités de Pohozaev (ou viriels)

$$E(U) = 2 \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_{x_1} U|^2 dx \quad \text{et} \quad E(U) - cP(U) = \frac{2}{d-1} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_{x_\perp} U|^2 dx,$$

obtenues par multiplication de  $(TW_c)$  par  $x_1 \partial_{x_1} U$  et  $x_\perp \cdot \nabla_{x_\perp} U$  et en intégrant par parties plusieurs fois.

L'étude de l'asymptotique à l'infini a suscité une série d'articles de P. Gravejat qui l'établissent rigoureusement (voir [74] et les références mentionnées). L'absence d'onde (non triviale) pour  $c = 0$  provient des identités de Pohozaev (voir [37]). La non-existence d'onde supersonique ( $c > c_s$ ) a été établie pour  $d \geq 2$  par P. Gravejat dans [73] puis par M. Mariş dans [130] pour une non linéarité plus générale (mais avec certaines conditions). Ces résultats sur l'asymptotique à l'infini valent pour  $c = c_s$  en dimension  $d = 2$  (ou  $d \geq 3$  et une condition d'intégrabilité supplémentaire).

## 2.1 Résultats d'existence par minimisation sous contrainte

En ce qui concerne les résultats d'existence pour les ondes progressives, essentiellement deux types d'approches variationnelles ont été proposées. On notera que les solutions de

$$\Delta U = U f(|U|^2) + ic \partial_{x_1} U \quad (TW_c)$$

sont exactement les points critiques de la fonctionnelle

$$\mathcal{F}_c(u) \equiv E(u) - cP(u).$$

Lorsque  $U$  est un point critique de  $\mathcal{F}_c$ , on peut retrouver les identités de Pohozaev en considérant les chemins  $\sigma \mapsto U_\sigma^1(x) = U(x_1/\sigma, x_\perp)$  et  $\sigma \mapsto U_\sigma^\perp(x) = U(x_1, x_\perp/\sigma)$  qui passent par  $U$  en  $\sigma = 1$  et en écrivant qu'alors

$$\frac{d\mathcal{F}_c(U_\sigma^1)}{d\sigma} \Big|_{\sigma=1} = 0 \quad \frac{d\mathcal{F}_c(U_\sigma^\perp)}{d\sigma} \Big|_{\sigma=1} = 0.$$

De manière analogue, on peut considérer le chemin  $\gamma \mapsto U_\gamma$  qui passe par  $U$  en  $\gamma = c$  et déduire la relation de groupe de Hamilton de

$$\frac{d\mathcal{F}_c(U_\gamma)}{d\gamma} \Big|_{\gamma=c} = 0.$$

Puisque le problème est variationnel, on peut envisager de trouver un point critique de  $\mathcal{F}_c$ , qui n'est pas un minimiseur mais plutôt un point col, ou bien de préférer une minimisation de l'énergie avec contrainte de moment  $P$  fixé, la vitesse  $c$  étant alors le multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte. La première méthode a l'avantage de fixer la vitesse de propagation  $c$ . La seconde permet facilement d'établir une propriété de stabilité (d'après l'argument de T. Benjamin [15], dont une justification est donnée par le travail [44] de T. Cazenave et P.-L. Lions), mais ne permet pas nécessairement de déterminer toutes les ondes. En effet, dans les diagrammes  $(E, P)$  ci-dessus pour (GP), il apparaît qu'en dimension  $d = 2$ , toutes les ondes sont minimiseurs de  $E$  à  $P$  fixé, par contre, en dimension  $d = 3$ , ce n'est le cas que pour la partie inférieure de la courbe. Plus précisément, ce n'est le cas, comme on le verra, que de la partie bleue de la courbe située en-dessous de la ligne pointillée rouge. Mentionnons aussi que si le potentiel  $F$  n'est pas positif, comme c'est le cas pour la nonlinéarité cubique-quintique, par exemple, l'énergie ne permet pas de contrôler l'énergie de Dirichlet.

La difficulté essentielle que l'on rencontre dans ce cadre variationnel est la continuité du moment  $P$  pour la convergence faible (sur  $\mathbb{R}^d$  tout entier). Pour illustrer cette difficulté, observons que pour l'expression

$$\vec{P} = \int_{\mathbb{R}^d} (A^2 - r_0^2) \nabla \phi dx,$$

valable lorsque  $U$  ne s'annule pas et a donc un relèvement  $U = Ae^{i\phi}$  ne s'annule pas, nous disposons de l'estimation

$$|(A^2 - r_0^2) \nabla \phi| \leq \frac{1}{\sqrt{2}A} \left( A^2 |\nabla \phi|^2 + \frac{1}{2} (A^2 - r_0^2)^2 \right) \leq \frac{1}{\sqrt{2}A} \left( |\nabla U|^2 + F(|U|^2) \right)$$

dans le cas (GP) ( $r_0 = 1$ ,  $f(\varrho) = \varrho - 1$ ,  $F(\varrho) = (\varrho - 1)^2/2$ ). Ceci est une bonne estimation si  $A$  est minoré, car à droite, nous avons la densité d'énergie. Cependant, pour l'expression (qui ne nécessite pas de relèvement)

$$\vec{P} = \int_{\mathbb{R}^d} \langle i(U - 1), \nabla U \rangle dx,$$

nous n'avons pas de telle estimée. L'idée est donc de séparer soigneusement les endroits où  $U$  s'annule ou en tout cas est proche de zéro.

L'approche par le lemme du col a été employée par F. Béthuel et J.-C. Saut dans [37] ( $d = 2$ ) et dans [46] ( $d \geq 3$ ) pour les petites vitesses (l'onde a alors de la vorticité). Pour l'approche par minimisation de  $E$     $P$  fixé, on mentionne l'article de F. Béthuel, G. Orlandi et D. Smets [36], toujours pour les petites vitesses, en dimension  $d \geq 3$ . La solution est alors appell e anneau de vorticité, car la fonction d'onde s'annule un cercle de grand rayon ( $d = 3$ ). Il s'agissait dans tous les cas de l'équation de Gross-Pitaevskii, mais l'étude resterait valable pour une nonlinéarité pour laquelle le potentiel  $F$  serait  $> 0$  pour  $\varrho \neq 1$ . Ces résultats ne concernent que les petites vitesses : la concentration de la vorticité en deux points ( $d = 2$ ) ou sur un anneau ( $d = 3$ ) est justifiée, et c'est d'ailleurs cette propriété de localisation des zéros (vortex) de la fonction d'onde qui permet de retrouver de la compacité pour passer à la limite sur le moment lorsque la taille du tore augmente, puisque les zéros de la fonction d'onde sont très bien connus. Les ondes de petite vitesse ( $c \simeq 0$ ) ont donc des vortex (la fonction d'onde s'annule) et sont désormais relativement bien connues. Il s'agit sur le diagramme énergie-moment de la figure 2.1 de la partie à droite pour  $d = 2$  et à droite pour la partie inférieure si  $d = 3$ .

Plus récemment, F. Béthuel, P. Gravejat et J.-C. Saut ont abordé en dimensions  $d = 2$  et  $d = 3$  et pour le modèle (GP), le problème de façon globale en considérant pour  $\mathbf{p} > 0$  donné le problème de minimisation

$$E_{\min}(\mathbf{p}) = \inf\{E(u), u \in W, P(u) = \mathbf{p}\}.$$

L'espace fonctionnel  $W$  est adapté à la définition du moment et contient les ondes progressives (vue leur décroissance algébrique à l'infini qui est connue)

$$W \equiv \{u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}, \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^d), \operatorname{Re}(u) - 1 \in L^4(\mathbb{R}^d), \operatorname{Im}(u) \in L^4(\mathbb{R}^d), \\ \nabla \operatorname{Re}(u) \in L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^d), \langle \nabla u, \operatorname{Re}(u) \rangle \in L^2(\mathbb{R}^d)\}.$$

Toutefois, il n'est pas un espace d'énergie naturel au vu de la décroissance à l'infini que l'on impose. Le résultat essentiel de [29] est le suivant :

**Théorème 1** ([29]). *Pour la nonlinéarité de Gross-Pitaevskii, il existe  $\mathbf{p}_* > 0$  tel que le problème de minimisation  $E_{\min}(\mathbf{p})$  dans l'espace  $W$  admet un minimiseur pour*

- $d = 2$  tout  $\mathbf{p} > 0$  ;
- $d = 3$  tout  $\mathbf{p} \geq \mathbf{p}_*$ .

*Tout minimiseur est une solution de  $(TW_c)$  pour un  $c \in ]0, c_s[$ .*

Le résultat est établi en considérant le problème de minimisation sur des tores de plus en plus grands (comme dans [36], [46]), la compacité du tore assurant un problème bien posé. L'objet est ensuite d'obtenir des bornes uniformes par rapport à la taille du tore. L'utilisation du lemme de concentration-compacité [124] permet alors de conclure. La difficulté sur le passage à la limite sur le moment est surmontée en utilisant des arguments fins sur les secteurs topologiques liés à la fonctionnelle de Ginzburg-Landau (*cf.* [6]). Ceux-ci permettent de contrôler les zéros de la solution et donc de relever les solutions au voisinage de l'infini. Si cette méthode permet d'établir l'existence de minimiseurs, elle ne permet pas en revanche de montrer la compacité des suites minimisantes pour le problème  $E_{\min}(\mathbf{p})$ . En outre, si l'on veut pouvoir exploiter ces propriétés minimisantes, il faut résoudre le problème de Cauchy pour (GP) dans l'espace  $W$ .

Chaque minimiseur pour  $E_{\min}(\mathbf{p})$  est une onde progressive pour une vitesse  $c$  liée à la dérivée de  $E_{\min}$  :

$$\frac{dE_{\min}(\mathbf{p})}{d\mathbf{p}} \Big|_d \leq c \leq \frac{dE_{\min}(\mathbf{p})}{d\mathbf{p}} \Big|_g,$$

ce qu'il faut bien sûr rapprocher de la relation de groupe d'Hamilton. En effet, il est montré dans [29] que  $E_{\min}$  est une fonction concave, donc a une dérivée à gauche et à droite partout. De plus,  $E_{\min}$  est dérivable sauf peut-être en un nombre au plus dénombrable de points. On peut donc dire que la relation de groupe d'Hamilton est vraie sauf peut-être pour une quantité au plus dénombrable de moments. Un résultat d'unicité du minimiseur



(aux symétries près du problème : translation et multiplication par un facteur de phase) permettrait de justifier la différentiabilité partout de la courbe  $E_{\min}$  et garantirait que l'ensemble des vitesses obtenues est un intervalle complet. A ce stade, on peut seulement dire que cet ensemble de vitesses contient au moins  $\{E'_{\min}(\mathbf{p}), E_{\min}$  dérivable en  $\mathbf{p}\}$ . Il est aussi possible de montrer malgré tout que cet ensemble contient des vitesses petites (avec des ondes progressives ayant de la vorticité, cf. [37], [36], [46]), et des vitesses proches de la vitesse du son  $\mathbf{c}_s$  en dimension  $d = 2$ , mais pas en dimension  $d = 3$ , puisque celles-ci correspondent à la branche inférieure du diagramme énergie-moment (figure 2.1 (b)). Il paraît légitime de croire, au vu des simulations numériques, que le théorème 1 fournit un intervalle de vitesses  $]0, \mathbf{c}_s[$  si  $d = 2$ , et  $]0, \mathbf{c}_*]$  pour  $d = 3$ , avec  $0 < \mathbf{c}_* < \mathbf{c}_s$ . Enfin, il provient de la façon dont le théorème 1 est prouvé que les ondes progressives obtenues de cette manière, pour  $d = 3$ , correspondent uniquement à la partie bleue du diagramme  $(E, P)$ . En effet, lors de l'application du principe de concentration-compacité, la condition

$$E < \mathbf{c}_s P$$

est cruciale pour exclure le cas de la dichotomie, et cela correspond à la partie située en-dessous de la droite en pointillé rouge. Plus précisément, pour  $d = 3$ , le  $\mathbf{p}_* > 0$  est défini comme étant tel que

$$E_{\min}(\mathbf{p}) < \mathbf{c}_s \mathbf{p} \quad \text{pour } \mathbf{p} > \mathbf{p}_*, \quad E_{\min}(\mathbf{p}) = \mathbf{c}_s \mathbf{p} \quad \text{pour } 0 < \mathbf{p} \leq \mathbf{p}_*.$$

Sur le diagramme  $(E, P)$ ,  $\mathbf{p}_*$  est donc l'abscisse du point d'intersection de la courbe en pointillé rouge et de la partie bleue de la courbe. Le travail [29] montre en particulier qu'il n'existe pas de minimiseur pour  $E_{\min}(\mathbf{p})$  d s que  $0 < \mathbf{p} < \mathbf{p}_*$ . En conséquence, la partie inférieure de la courbe de la figure 2.1 (b) située au-dessus de la droite en pointillé rouge est très certainement constituée de minimiseurs *locaux* de  $E$     $P$  fixé.

L'existence même de  $\mathbf{p}_* > 0$  en dimension  $d = 3$  repose sur le résultat suivant.

**Proposition 1** ([29]). *Pour la nonlinéarité de Gross-Pitaevskii en dimension  $d = 3$ , il existe  $E_0 > 0$  tel que toute onde progressive non triviale est d'énergie  $\geq E_0$ .*

Ce résultat a été étendu en dimension plus grande ( $d \geq 4$ ) (pour (GP)) par A. de Laire [58]. Il s'ensuit des théorème 1 et proposition 1 que pour (GP), l'ensemble des vitesses  $\mathcal{C}$  obtenu par minimisation de  $E$     $P$  fixé est tel que

$$\begin{cases} d = 2 : & \inf \mathcal{C} = 0 \quad \text{et} \quad \sup \mathcal{C} = \mathbf{c}_s = \sqrt{2} \\ d = 3 : & \inf \mathcal{C} = 0 \quad \text{et} \quad \sup \mathcal{C} < \mathbf{c}_s = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Comme d j   mentionné, déterminer si  $\mathcal{C}$  est un intervalle est un problème ouvert.

Par une toute autre approche, M. Mari  établit dans [128] le résultat suivant.

**Théorème 2** ([128]). *Soit  $d \geq 3$ . Pour une nonlinéarité générale, avec  $f'(r_0^2) > 0$ , on a, pour toute vitesse  $0 < c < \mathbf{c}_s$ , existence d'au moins une solution non triviale de  $(\text{TW}_c)$ .*

Par nonlinéarité générale, on entend une nonlinéarité  $f$  continue, de classe  $\mathcal{C}^2$  près de  $r_0^2$  (la classe  $\mathcal{C}^1$  suffit malgré tout dans de très nombreux résultats, mais cela simplifie les hypothèses), coercive à l'infini au sens

$$\exists \alpha > 0, \quad \exists C > 0, \quad \forall \varrho > C, \quad f(\varrho) \geq C\varrho^\alpha,$$

et sous-critique :

$$\exists C > 0, \quad \exists q \in [1, +\infty[, \quad \text{avec} \quad (d-2)q < 2, \quad \forall \varrho \geq 0, \quad f(\varrho) \leq C(1 + \varrho^q).$$

Cela inclut dans le même cadre la nonlinéarité de Gross-Pitaevskii et la nonlinéarité cubique-quintique. L'approche dans [128] est très ingénieuse et consiste à minimiser  $\mathcal{F}_c$  avec la contrainte de Pohozaev

$$E(u) - cP(u) = \frac{2}{d-1} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_{x_\perp} u|^2 dx,$$

puisque celle-ci est satisfaite pour les ondes. Plus précisément, pour  $0 < c < \mathbf{c}_s$ , [128] considère le problème

$$T_c \equiv \inf \left\{ \mathcal{F}_c(u), \quad E(u) - cP(u) = \frac{2}{d-1} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_{x_\perp} u|^2 dx \right\}.$$

De façon surprenante, cette minimisation sous contrainte n'introduit finalement pas de multiplicateur de Lagrange (après remise à l'échelle). Un des avantages est que la vitesse  $c$  est prescrite : on est donc sûr qu'il existe une onde pour toute vitesse  $0 < c < \mathbf{c}_s$ , ce qui a été une avancée majeure pour le cas tri-dimensionnel. Malheureusement, cette approche ne fonctionne plus en dimension  $d = 2$  car la géométrie de la fonctionnelle  $\mathcal{F}_c$  restreinte à une "variété de Pohozaev" est différente.

Notre objectif dans [A<sub>8</sub>], avec M. Mariş, a été double. Tout d'abord, trouver une approche directe pour le problème de minimisation  $E_{\min}(\mathbf{p})$ , en se plaçant dans l'espace d'énergie naturel. Une difficulté est de définir le moment dans l'espace d'énergie

$$\mathcal{X} \equiv \left\{ \psi \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \psi|^2 + (|\psi|^2 - r_0^2)^2 dx < +\infty \right\},$$

mais cela peut se faire en adaptant la définition du moment proposé dans [128] pour  $d \geq 3$ . En effet, si  $d \geq 2$ , on commence par définir  $\mathcal{Y} \equiv \{ \partial_{x_1} h, h \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d), \nabla h \in L^2(\mathbb{R}^d) \}$ , muni de  $\| \partial_{x_1} h \|_{\mathcal{Y}} \equiv \| \nabla h \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ , et la forme linéaire continue

$$\mathbb{L} : \mathcal{Y} + L^1(\mathbb{R}^d) \ni \partial_{x_1} h + \Theta \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \Theta dx \in \mathbb{R}$$

(en vérifiant qu'elle vaut bien 0 sur  $\mathcal{Y} \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ ). Imposer " $\mathbb{L}(\partial_{x_1} h) = 0$ " traduit exactement que l'intégrale formelle d'une dérivée est nulle. Ensuite, l'on montre que si  $U \in \mathcal{X}$ , alors  $\langle i \partial_{x_1} U, U \rangle \in L^1(\mathbb{R}^d) + \mathcal{Y}$ , ce qui autorise à définir le moment dans la direction  $x_1$  par

$$P(U) = \mathbb{L}(\langle iU, \partial_{x_1} U \rangle).$$

En collaboration avec M. Mariş, nous avons alors pu montrer le résultat suivant.

**Théorème 3.** [A<sub>8</sub>] Soit  $d \geq 2$ . On considère une nonlinéarité générale, avec  $f'(r_0^2) > 0$ , telle que la fonction potentielle  $F$  soit positive. Alors, il existe  $\mathbf{p}_* > 0$  tel que le problème de minimisation  $E_{\min}(\mathbf{p})$  dans  $\mathcal{X}$  admet un minimiseur pour

- si  $d = 2$  et  $\Gamma \neq 0$  : tout  $\mathbf{p} > 0$  ;
- si  $d = 2$  et  $\Gamma = 0$  : tout  $\mathbf{p} \geq \mathbf{p}_*$  ;
- si  $d \geq 3$  : tout  $\mathbf{p} \geq \mathbf{p}_*$ .

Plus précisément, les suites minimisantes en jeu sont compactes dans  $\mathcal{X}$  à translation près. Tout minimiseur est une solution non triviale de  $(\text{TW}_c)$  pour un  $c \in ]0, \mathbf{c}_s[$ .

La différence de fond avec le résultat de F. Béthuel, P. Gravejat et J.-C. Saut [29] est que l'on aborde ici le problème de façon globale, en établissant la compacité des suites minimisantes pour  $E_{\min}(\mathbf{p})$  (pour  $\mathbf{p} \geq \mathbf{p}_*$  si  $(d = 2, \Gamma = 0)$  ou si  $d \geq 3$ ). Cela permet d'établir un résultat de stabilité orbitale en suivant le résultat bien connu de T. Cazenave et P.-L. Lions [44].

**Corollaire 1.** [A<sub>8</sub>] Soit  $d \geq 2$ . On considère une nonlinéarité générale, avec  $f'(r_0^2) > 0$ , telle que la fonction potentielle  $F$  soit positive. Alors, les ondes progressives obtenues au théorème 3 sont orbitalement stables dans  $\mathcal{X}$ .

Il faut pour cela bien sûr que le moment tel qu'il a été défini soit une quantité conservée par le flot, ce que nous justifions. Cela montre l'avantage de travailler avec cette définition du moment plutôt que l'espace  $W$ . Bien sûr, pour (GP), on a

$$F(\varrho) = \frac{1}{2}(\varrho - 1)^2,$$

qui est bien positive, et le corollaire ci-dessus établit des propriétés de stabilité pour les ondes de (GP) quand  $d = 2$  ou  $d = 3$ , puisque pour  $d \geq 4$ , le problème devient critique ou surcritique. Ce résultat établit la stabilité orbitale des ondes correspondants à la partie bleue de la courbe (figure 2.1 (b)) : la partie inférieure située au-dessous de la droite rouge  $E = \mathbf{c}_s P$ . Si l'on veut pouvoir établir la stabilité orbitale de la partie inférieure de la courbe située au-dessus de la droite rouge  $E = \mathbf{c}_s P$  par des méthodes variationnelles, il faudrait pouvoir justifier, comme on l'a déjà vu, une propriété de minimisation locale sous contrainte.

Lorsque le potentiel  $F$  n'est pas positif, comme c'est le cas pour la non-linéarité cubique-quintique,  $E_{\min}(\mathbf{p})$  vaut  $-\infty$ , ce qui interdit d'utiliser cette approche. Noter que le résultat de M. Mariş (théorème 2) ne nécessite pas d'hypothèse sur le signe du potentiel  $F$ .

**Quelques mots sur la démonstration.** La démonstration du théorème 3 est inspirée par celle du théorème 2. En particulier, on utilise des régularisations paraboliques locales comme introduites par L. Almeida et F. Béthuel dans [7], à savoir qu'à  $u$ , on associe un minimiseur  $\tilde{u} \in u + H_0^1(\Omega)$  de fonctionnelles ressemblant à

$$G_h(v) \equiv \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \frac{1}{2}(|v|^2 - r_0^2)^2 dx + \int_{\Omega} \frac{|u - v|^2}{h^2} dx,$$

où  $h$  est un petit paramètre. Le point est que  $u$  peut posséder par exemple une structure avec deux vortex (zéros) de degrés  $+1$  et  $-1$  situés à très petite distance l'un de l'autre. Cette paire de vortex n'est pas porteuse d'information pour  $u$  en terme de moment, par exemple, car les vortex sont proches. Le principe est que  $\tilde{u}$ , solution d'un problème elliptique avec paramètre  $h$ , ne contient plus cette paire de vortex si la distance entre les deux est  $\ll h$  : ils ont été "nettoyés". Il faut ensuite s'assurer que  $u$  et  $\tilde{u}$  ont des moments proches, et ceci constitue, tout comme dans [128] la partie technique de l'argument. On insiste sur le fait que l'avantage principal de notre approche est de définir le moment directement dans l'espace d'énergie et de poser le problème de minimisation globalement sur  $\mathbb{R}^d$ , et non sur des tores. Le principe de concentration-compacité de P.-L. Lions [124] est le point de départ naturel. Mettons en évidence que la condition essentielle permettant d'exclure la dichotomie est la fameuse hypothèse de sous-additivité, qui est en général difficile à vérifier pour des équations non homogènes. Cependant, vue la concavité de la fonction  $E_{\min}$ , on peut voir qu'elle est équivalente à la condition  $E_{\min}(\mathbf{p}) < \mathbf{c}_s \mathbf{p}$  au sens où, pour un  $\mathbf{p} > 0$  fixé,

$$\begin{aligned} &\text{soit } \forall \mathbf{p} \in [0, \mathbf{p}], E_{\min}(\mathbf{p}) = \mathbf{c}_s \mathbf{p}; \\ &\text{soit } \forall \mathbf{p} \in (0, \mathbf{p}), E_{\min}(\mathbf{p}) + E_{\min}(\mathbf{p} - \mathbf{p}) < E_{\min}(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

En conséquence, la condition  $E_{\min}(\mathbf{p}) < \mathbf{c}_s \mathbf{p}$  est nécessaire et suffisante pour éviter la dichotomie au moment  $\mathbf{p}$ . Pour une nonlinéarité générale, nous pouvons assurer que cette condition est vérifiée pour  $\mathbf{p}$  grand simplement à l'aide de fonctions de comparaison ayant des vortex (rappelons que pour  $c \simeq 0$ , les ondes progressives sont bien connues et ont des vortex). Ceci donne naturellement les cas qui demandent  $\mathbf{p} \geq \mathbf{p}_*$ . Pour le cas restant ( $d = 2$ ,  $\Gamma \neq 0$ ), le fait que " $\mathbf{p}_* = 0$ " sera déduit d'un développement asymptotique pour des fonctions de comparaison fabriquées à partir des "ground states" de (KP-I) (on gardera à l'esprit que si  $d = 2$  pour l'équation (GP), cela correspond aux ondes de petite énergie). Nous verrons cela à la prochaine sous-section, lorsque l'on justifie cette limite transsonique (KP-I).

Afin de pouvoir envisager le cas où  $F$  a des valeurs négatives, ce qui constituait notre second objectif, il nous faut adapter l'approche du théorème 2. Remarquons que le théorème 2 fournit déjà un résultat d'existence pour toute vitesse  $0 < c < \mathbf{c}_s$  quand  $d \geq 3$ , mais que pour le moment, aucun résultat ne vaut en dimension  $d = 2$ . Nous avons choisi de minimiser  $E - P$  sous la contrainte d'énergie de Dirichlet fixée

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dx = k,$$

c'est-à-dire de regarder le problème

$$I_{\min}(k) \equiv \inf \left\{ E - P(u), \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dx = k \right\}.$$

Comme pour la quantité  $E_{\min}$ , la fonction  $I_{\min}$  est concave. Noter qu'en dimension  $d = 2$ , l'énergie de Dirichlet est invariante par changement d'échelle, *i.e.* par changement de  $u(x)$  pour  $u(\sigma x)$ . Nous prouvons alors le résultat suivant.

**Théorème 4.**  $[A_8]$  *On considère  $d \geq 2$  et une nonlinéarité générale, avec  $f'(r_0^2) > 0$ . Alors il existe  $0 \leq k_0 \leq k_{\infty} \leq +\infty$  tels que le problème de minimisation  $I_{\min}(k)$  admet au moins un minimiseur pour  $k_0 < k < k_{\infty}$ . Pour un tel minimiseur, il existe  $c \in ]0, \mathbf{c}_s[$  tel que*

$$\frac{dI_{\min}(k)}{dk} \Big|_d \leq -\frac{1}{c^2} \leq \frac{dI_{\min}(k)}{dk} \Big|_g$$

*et tel que  $u(x) \equiv u_*(c^{-1}x)$  résout  $(TW_c)$ . Enfin, nous avons*

- si  $d \geq 3$  ou si ( $d = 2$  et  $F \geq 0$ ), alors  $k_{\infty} = +\infty$  et la vitesse  $c$  tend vers 0 quand  $k \rightarrow +\infty$ ;
- si  $d = 2$  et  $\min F < 0$ , alors  $k_{\infty} < +\infty$ ;
- si  $d = 2$ , alors  $k_0 = 0$  si et seulement si  $\Gamma \neq 0$ , auquel cas la vitesse  $c$  tend vers  $\mathbf{c}_s$  lorsque  $k \rightarrow 0$ .

On rappelle que  $I_{\min}$  étant concave, elle possède en tout point une dérivée à gauche et à droite. En outre, c'est à cause du changement d'échelle  $u(x) \equiv u_*(c^{-1}x)$  que l'on voit qu'il n'est pas possible de prescrire la vitesse, et que l'on minimise donc  $E - P$  (sous contrainte), mais pas  $\mathcal{F}_c = E - cP$ .

La plage de vitesses obtenues est, au pire, du même type que celle obtenue au théorème 1, *i.e.*  $\{I'_{\min}(k), I_{\min}$  dérivable en  $k\}$ . Si  $k_{\infty} = +\infty$ , on peut montrer que pour  $k$  grand, on obtient des vitesses proches de 0, et si  $d = 2$  et  $\Gamma \neq 0$  (donc  $k_0 = 0$ ), on obtient pour  $k$  petit des vitesses proches de  $\mathbf{c}_s$ . La condition  $\Gamma \neq 0$  est vérifiée par la nonlinéarité cubique-quintique, et c'est à notre connaissance le seul résultat existant sur les ondes progressives pour ce modèle en dimension  $d = 2$ .

Nous avons pu aussi généraliser la proposition 1 de la façon suivante.

**Proposition 2.**  $[A_8]$  *On suppose que l'on est dans l'une des deux situations suivantes, pour une nonlinéarité générale  $f$  avec  $f'(r_0^2) > 0$  :*

- $d \geq 3$  ;
- $d = 2$  et  $\Gamma = 0$ .

*Alors il existe  $E_0 > 0$  tel que pour tout  $c \in [0, \mathbf{c}_s]$  et toute onde progressive  $U \in \mathcal{X}$  de vitesse  $c$  vérifiant*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla U|^2 dx + \left| \int_{\mathbb{R}^d} V(|U|^2) dx \right| \leq E_0$$

*est constante.*

Si le cas  $d \geq 3$  suit essentiellement la preuve de [29] et [58], lorsque  $d = 2$  et  $\Gamma = 0$ , il faut tenir compte d'une compensation dans les termes qui demande un peu plus de travail.

## 2.2 Limite transsonique en dimensions 2 et 3 ( $\Gamma \neq 0$ )

Les résultats précédents fournissent des ondes progressives de vitesse  $c$  proche de la vitesse du son  $\mathbf{c}_s$ . Cette section est consacrée à l'étude de la limite  $c \rightarrow \mathbf{c}_s$ . Nous avons déjà vu au chapitre 1 comment obtenir (si  $d \geq 2$ ) l'équation (KP-I) (ou (KdV) si  $d = 1$ )

$$\frac{2}{\mathbf{c}_s} \partial_{\tau} \zeta + \Gamma \zeta \partial_{z_1} \zeta - \frac{1}{\mathbf{c}_s^2} \partial_{z_1}^3 \zeta + \Delta_{z_{\perp}} \partial_{z_1}^{-1} \zeta = 0,$$

où le coefficient  $\Gamma$  est donné par

$$\Gamma = 6 + \frac{4r_0^4}{\mathbf{c}_s^2} f''(r_0^2).$$

On s'attend donc tout naturellement à ce que les ondes progressives de (NLS) convergent dans un changement d'échelle approprié vers les ondes solitaires de (KP-I). On suppose ici  $\Gamma \neq 0$ , sinon (KP-I) est une équation dispersive linéaire sans ondes solitaires. Rappelons que le flot (KP-I) préserve (formellement) le moment

$$\mathcal{M}(\zeta) \equiv \int_{\mathbb{R}^d} \zeta^2 dz$$

et l'énergie

$$\mathcal{E}(\zeta) \equiv \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\mathbf{c}_s^2} (\partial_{z_1} \zeta)^2 + |\nabla_{z_{\perp}} \partial_{z_1}^{-1} \zeta|^2 + \frac{\Gamma}{3} \zeta^3 dz.$$

### 2.2.1 Caractérisations variationnelles des “ground states” de (KP-I)

Si (KP-II) n'a pas d'onde progressive, (KP-I), elle, en possède, et elles ont été intensivement étudiées par A. de Bouard et J.-C. Saut dans les articles [55], [56] et [57]. Les ondes solitaires  $\zeta(\tau, z) = \mathcal{W}(z_1 + v\tau, z_{\perp})$ , où  $v > 0$ , sont données par les solutions  $\mathcal{W}$  non triviales de

$$\frac{2v}{\mathbf{c}_s} \partial_{z_1} \mathcal{W} + \Gamma \mathcal{W} \partial_{z_1} \mathcal{W} - \frac{1}{\mathbf{c}_s^2} \partial_{z_1}^3 \mathcal{W} + \Delta_{z_{\perp}} \partial_{z_1}^{-1} \mathcal{W} = 0.$$

Remarquons tout d'abord par changement d'échelle et grâce à l'homogénéité, on peut de se ramener à  $v = 1/(2\mathbf{c}_s)$ , *i.e.* à

$$\frac{1}{\mathbf{c}_s^2} \partial_{z_1} \mathcal{W} + \Gamma \mathcal{W} \partial_{z_1} \mathcal{W} - \frac{1}{\mathbf{c}_s^2} \partial_{z_1}^3 \mathcal{W} + \Delta_{z_{\perp}} \partial_{z_1}^{-1} \mathcal{W} = 0. \quad (\text{SW})$$

En effet, si  $\mathcal{W}$  est une onde de vitesse  $v$ , alors

$$\tilde{\mathcal{W}}(z) \equiv \frac{1}{2v\mathfrak{c}_s} \mathcal{W}\left(\frac{z_1}{\sqrt{2v\mathfrak{c}_s}}, \frac{z_\perp}{2v\mathfrak{c}_s}\right)$$

résout (SW). Un “ground state” de (KP-I) (de vitesse  $1/(2\mathfrak{c}_s)$ ) est par définition une onde solitaire non triviale qui minimise l’action

$$\mathcal{S}(\mathcal{W}) \equiv \mathcal{E}(\mathcal{W}) + \frac{1}{\mathfrak{c}_s^2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{W}^2 dz.$$

Il découle des travaux précédemment mentionnés qu’il existe des “ground states” (de vitesse  $1/(2\mathfrak{c}_s)$ ) si et seulement si  $d \in \{2, 3\}$ . La partie non existence provient de la combinaison des identités de Pohozaev et de l’identité d’énergie. La partie existence provient d’une caractérisation variationnelle adaptée, comme par exemple (pour un  $\lambda \neq 0$  convenable)

$$\inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\mathfrak{c}_s^2} (\partial_{z_1} \mathcal{W})^2 + |\nabla_{z_\perp} \partial_{z_1}^{-1} \mathcal{W}|^2 + \frac{1}{\mathfrak{c}_s^2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{W}^2 dz, \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{W}^3 dz = \lambda \right\}, \quad (2.1)$$

où  $\mathcal{W}$  vit dans un espace  $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^d)$  dans lequel tous les termes sont bien définis ([56] propose une autre caractérisation variationnelle). On note

$$\mathcal{S}_{\min} \equiv \inf \left\{ \mathcal{S}(\mathcal{W}), \mathcal{W} \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}, \mathcal{W} \text{ résout (SW)} \right\}$$

l’action d’un “ground state”. En dimension  $d = 2$ , (KP-I) étant complètement intégrable, la théorie du scattering inverse fournit une solution explicite, le “*lump*” (cf. [127])

$$\mathcal{W}_0(z) \equiv -\frac{24}{\mathfrak{c}_s^2 \Gamma} \frac{3 - z_1^2 + z_2^2/\mathfrak{c}_s^2}{(3 + z_1^2 + z_2^2/\mathfrak{c}_s^2)^2}.$$

Il est attendu, mais non prouvé, que  $\mathcal{W}_0$  soit un “ground state”, voire le “ground state”.

En fait, nous verrons que la caractérisation (2.1) n’est pas la bonne puisqu’elle n’est pas formulée à l’aide des quantités naturelles : énergie et moment. Rappelons que l’on a vu, lors de la justification de la dynamique (KP-I) à partir de (NLS), les liens suivants entre énergie et moment pour chacune des équations :

$$P(\Psi_\varepsilon) \simeq 2\mathfrak{c}_s \varepsilon^{5-2d} \int_{\mathbb{R}^d} A_\varepsilon^2 dz \simeq 2\mathfrak{c}_s \varepsilon^{5-2d} \mathcal{M}(A_\varepsilon) \quad (2.2)$$

et

$$\mathcal{F}_{c(\varepsilon)}(\Psi_\varepsilon) \simeq \mathfrak{c}_s^2 \varepsilon^{7-2d} \left[ \mathcal{S}(A_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2 \mathfrak{c}_s^2} \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_z \phi_\varepsilon - \mathfrak{c}_s A_\varepsilon)^2 dz \right]. \quad (2.3)$$

C’est pour cela que nous avons besoin, dans la mesure du possible, de caractérisations ne faisant intervenir qu’énergie et moment. En dimension  $d = 2$ , [57] donne la caractérisation suivante.

**Théorème 5** ([57]). *Supposons  $d = 2$  et  $\Gamma \neq 0$ . Il existe  $\mu > 0$  tel que, pour le problème de minimisation*

$$\inf \left\{ \mathcal{E}(\mathcal{W}), \mathcal{W} \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^2), \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\mathfrak{c}_s^2} \mathcal{W}^2 dz = \mu \right\}, \quad (2.4)$$

l’ensemble des “ground states” de (KP-I) (de vitesse  $1/(2\mathfrak{c}_s)$ ) est exactement l’ensemble des minimiseurs et n’est pas vide. De plus, les suites minimisantes sont compactes dans  $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^2)$  à translation près. Finalement,

$$\mu = \frac{3}{2} \mathcal{S}_{\min} \quad \text{et} \quad \inf \left\{ \mathcal{E}(\mathcal{W}), \mathcal{W} \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^2), \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\mathfrak{c}_s^2} \mathcal{W}^2 dz = \mu \right\} = -\frac{1}{2} \mathcal{S}_{\min}.$$

Toutefois, cette caractérisation est spécifique au cas bi-dimensionnel : elle permet de prouver (toujours en suivant T. Cazenave et P.-L. Lions [44]) la stabilité orbitale de l’ensemble (car il n’y a pas unicité) des “ground states” de (KP-I) lorsque  $d = 2$  (cf. [57]), alors qu’on a instabilité par explosion si  $d = 3$  (voir [125]).

Dans le cas  $d = 3$ , il nous faudra donc trouver une caractérisation variationnelle de ces “ground states”, ce que l’on fera en calquant la manière dont M. Mariş dans [128] établit son résultat d’existence, à savoir le problème de minimisation de l’action sous la contrainte de Pohozaev

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\mathfrak{c}_s^2} (\partial_{z_1} \mathcal{W})^2 + |\nabla_{z_\perp} \partial_{z_1}^{-1} \mathcal{W}|^2 + \frac{\Gamma}{3} \mathcal{W}^3 + \frac{1}{\mathfrak{c}_s^2} \mathcal{W}^2 dz = \frac{2}{d-1} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_{z_\perp} \partial_{z_1}^{-1} \mathcal{W}|^2 dz,$$

avec  $d = 3$  (on a déjà vu que pour  $d = 2$ , cette méthode ne marche pas pour (NLS)). C'est-à-dire que l'on envisage le problème de minimisation 3d

$$\mathcal{S}_* \equiv \inf \left\{ \mathcal{S}(\mathcal{W}), \mathcal{W} \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}, \mathcal{S}(\mathcal{W}) = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_{z_\perp} \partial_{z_1}^{-1} \mathcal{W}|^2 dz \right\}. \quad (2.5)$$

On prouve alors le résultat attendu :

**Théorème 6.**  $[\mathcal{A}_8]$  *On suppose  $d = 3$  et  $\Gamma \neq 0$ . Alors, il existe au moins un "ground state" pour (KP-I) de vitesse  $1/(2\mathbf{c}_s)$ . Plus précisément,  $\mathcal{S}_*$  a des minimiseurs, et pour tout minimiseur  $\mathcal{W}_0$  de  $\mathcal{S}_*$ , il existe  $\sigma > 0$  tel que  $\mathcal{W}(z) \equiv \mathcal{W}_0(z_1, \sigma^{-1} z_\perp)$  est aussi un minimiseur pour  $\mathcal{S}_*$  et  $\mathcal{W}$  est un "ground state" de (KP-I) de vitesse  $1/(2\mathbf{c}_s)$ . En particulier,  $\mathcal{S}_* = \mathcal{S}_{\min}$ .*

Nous établissons en fait, comme pour le théorème 5, des propriétés de compacité dans  $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^3)$  des suites minimisantes de  $\mathcal{S}_*$  (à translation et changement d'échelle près dans les variables transverses).

### 2.2.2 Convergence vers un "ground state" de (KP-I)

L'obtention formelle de la convergence des ondes de (NLS) avec donnée non nulle à l'infini vers les ondes solitaires de (KdV) ou (KP-I) suit celle de [95] pour l'équation de Gross-Pitaevskii en dimensions  $d = 2$  ou  $d = 3$ , et aussi celle de [102], [103] et [101] pour le contexte de l'Optique Non Linéaire. Pour simplifier, on normalise  $r_0 = 1$ . On insère dans (TW<sub>c</sub>) l'ansatz

$$U(x) = \left(1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon(z)\right) \exp(i\varepsilon \phi_\varepsilon(z)) \quad z_1 \equiv \varepsilon x_1, \quad z_\perp \equiv \varepsilon^2 x_\perp \quad (2.6)$$

où le petit paramètre  $0 < \varepsilon < \mathbf{c}_s$  et  $c$  sont liés par la relation

$$c(\varepsilon) \equiv \sqrt{\mathbf{c}_s^2 - \varepsilon^2}.$$

On a donc bien  $c(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{c}_s$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . On obtient alors le système

$$\begin{cases} -c(\varepsilon) \partial_{z_1} A_\varepsilon + 2\varepsilon^2 \partial_{z_1} \phi_\varepsilon \partial_{z_1} A_\varepsilon + 2\varepsilon^4 \nabla_{z_\perp} \phi_\varepsilon \cdot \nabla_{z_\perp} A_\varepsilon + (1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon) \left( \partial_{z_1}^2 \phi_\varepsilon + \varepsilon^2 \Delta_{z_\perp} \phi_\varepsilon \right) = 0 \\ -c(\varepsilon) \partial_{z_1} \phi_\varepsilon + \varepsilon^2 (\partial_{z_1} \phi_\varepsilon)^2 + \varepsilon^4 |\nabla_{z_\perp} \phi_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} f \left( (1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon)^2 \right) - \varepsilon^2 \frac{\partial_{z_1}^2 A_\varepsilon + \varepsilon^2 \Delta_{z_\perp} A_\varepsilon}{1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon} = 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

ce qui revient à remplacer  $\partial_\tau - \varepsilon^{-2} \partial_{z_1}$  par  $c(\varepsilon) \partial_{z_1}$  dans le système de Madelung (1.20)

Au niveau formel, si  $A_\varepsilon \rightarrow A$  et  $\phi_\varepsilon \rightarrow \phi$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans un sens raisonnable, on obtient comme pour la justification dynamique, au premier ordre,

$$\begin{cases} -\mathbf{c}_s \partial_{z_1} A + \partial_{z_1}^2 \phi = 0 \\ -\mathbf{c}_s \partial_{z_1} \phi + \mathbf{c}_s^2 A = 0, \end{cases}$$

où l'on a utilisé, pour la seconde, le développement de Taylor

$$f \left( (1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon)^2 \right) = f(1) - \mathbf{c}_s^2 \varepsilon^2 A_\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^4) = -\mathbf{c}_s^2 \varepsilon^2 A_\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Ces deux contraintes n'en font là encore qu'une seule :

$$\mathbf{c}_s A = \partial_{z_1} \phi. \quad (2.8)$$

Afin d'éliminer les termes singuliers, on additionne  $c(\varepsilon)/\mathbf{c}_s^2$  fois la première équation de (2.7) et  $\partial_{z_1}/\mathbf{c}_s^2$  fois la seconde, et on développe un cran plus loin la nonlinéarité :

$$f \left( (1 + \alpha)^2 \right) = \mathbf{c}_s^2 \alpha + \left( \frac{\mathbf{c}_s^2}{2} + 2f''(1) \right) \alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^3) \text{ quand } \alpha \rightarrow 0,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathbf{c}_s^2 - c^2(\varepsilon)}{\varepsilon^2 \mathbf{c}_s^2} \partial_{z_1} A_\varepsilon - \frac{1}{\mathbf{c}_s^2} \partial_{z_1} \left( \frac{\partial_{z_1}^2 A_\varepsilon + \varepsilon^2 \Delta_{z_\perp} A_\varepsilon}{1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon} \right) + \frac{c(\varepsilon)}{\mathbf{c}_s^2} (1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon) \Delta_{z_\perp} \phi_\varepsilon \\
& + \left\{ 2 \frac{c(\varepsilon)}{\mathbf{c}_s^2} \partial_{z_1} \phi_\varepsilon \partial_{z_1} A_\varepsilon + \frac{c(\varepsilon)}{\mathbf{c}_s^2} A_\varepsilon \partial_{z_1}^2 \phi_\varepsilon + \frac{1}{\mathbf{c}_s^2} \partial_{z_1} [(\partial_{z_1} \phi_\varepsilon)^2] + \left[ \frac{1}{2} + 2 \frac{f''(1)}{\mathbf{c}_s^2} \right] \partial_{z_1} (A_\varepsilon^2) \right\} \quad (2.9) \\
& = -2\varepsilon^2 \frac{c(\varepsilon)}{\mathbf{c}_s^2} \nabla_{z_\perp} \phi_\varepsilon \cdot \nabla_{z_\perp} A_\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{\mathbf{c}_s^2} \partial_{z_1} [|\nabla_{z_\perp} \phi_\varepsilon|^2] - \frac{1}{\mathbf{c}_s^2 \varepsilon^4} \partial_{z_1} [\mathcal{O}((\varepsilon^2 A_\varepsilon)^3)].
\end{aligned}$$

Par suite, si  $A_\varepsilon \rightarrow A$  et  $\phi_\varepsilon \rightarrow \phi$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans un sens à préciser, on déduit de la contrainte (2.8) que  $\partial_{z_1}^{-1} A = \phi/\mathbf{c}_s$ , et comme  $\mathbf{c}_s^2 - c^2(\varepsilon) = \varepsilon^2$ , (2.9) entraîne

$$\frac{1}{\mathbf{c}_s^2} \partial_{z_1} A - \frac{1}{\mathbf{c}_s^2} \partial_{z_1}^3 A + \Gamma A \partial_{z_1} A + \Delta_{z_\perp} \partial_{z_1}^{-1} A = 0,$$

qui est (SW).

On donne maintenant notre résultat principal prouvant l'existence, en dimensions  $d = 2$  et  $d = 3$ , d'une suite de solutions de (TW<sub>c</sub>) qui convergent vers un "ground state" de (KP-I) (de vitesse  $1/(2\mathbf{c}_s)$ ) avec les mises à l'échelle adaptées.

**Théorème 7.**  $[\mathcal{A}_7]$  *On considère une nonlinéarité  $f$  générale, de classe  $\mathcal{C}^3$  près de  $r_0^2 = 1$ , avec  $f'(1) > 0$ . On suppose que  $\Gamma \neq 0$  et  $d = 2$  ou  $d = 3$ . Alors, il existe une suite  $(u_n, c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $u_n$  est une onde progressive de vitesse  $c_n$  non triviale satisfaisant  $|u_n| \geq 1/2$  sur  $\mathbb{R}^d$ , avec  $c_n \rightarrow \mathbf{c}_s$  et telle que*

$$E(u_n) \sim \mathbf{c}_s P(u_n) \sim \mathbf{c}_s^4 (7 - 2d) \mathcal{S}_{\min} \left( \mathbf{c}_s^2 - c_n^2 \right)^{\frac{5-2d}{2}} = \mathbf{c}_s^4 (7 - 2d) \mathcal{S}_{\min} \varepsilon_n^{5-2d}$$

et

$$E(u_n) - c_n P(u_n) \sim \mathbf{c}_s^2 \mathcal{S}_{\min} \varepsilon_n^{7-2d}, \quad \varepsilon_n \equiv \sqrt{\mathbf{c}_s^2 - c_n^2}.$$

De plus, on peut écrire  $u_n$  sous la forme

$$u_n(x) = \left( 1 + \varepsilon_n^2 A_n(z) \right) \exp(i\varepsilon_n \phi_n(z)) \quad z_1 \equiv \varepsilon_n x_1, \quad z_\perp \equiv \varepsilon_n^2 x_\perp$$

et il existe un "ground state"  $\mathcal{W}$  de (KP-I) (de vitesse  $1/(2\mathbf{c}_s)$ ) tel que, pour tous  $s \in \mathbb{N}$  et  $1 < p \leq \infty$ ,

$$\frac{\partial_{z_1} \phi_n}{\mathbf{c}_s} \rightarrow \mathcal{W} \quad \text{et} \quad A_n \rightarrow \mathcal{W} \quad \text{dans} \quad W^{s,p}(\mathbb{R}^d).$$

En dimension  $d = 2$ , pour l'équation de Gross-Pitaevskii, l'article [29] de F. Béthuel, P Gravejat et J.-C. Saut prouve un résultat analogue pour les solutions construites dans le théorème 1 ([30]). Les différences avec le résultat de [29] sont détaillées ci-dessous. Le théorème 7 donne une justification rigoureuse à l'existence de la branche supérieure (figure 2.1 (b)) de C. Jones et P. Roberts [95] en dimension  $d = 3$ . Cette branche supérieure était conjecturée sur la base de calculs formels comme ci-dessus et de simulations numériques. Toutefois, ces simulations ne permettent pas d'avoir des moments très grands. Comme déjà mentionné, en dimension  $d = 3$ , les solutions sur cette branche supérieure sont attendues instables (voir [26]), l'instabilité de ces ondes de raréfaction se manifestant par l'apparition de vortex (*cf.* [24]). Cependant, la croissance pour le problème linéarisé est attendue en  $e^{\mathcal{O}(\varepsilon^3)t}$ , donc assez longue à se manifester.

**Quelques idées sur la démonstration.** Le point de départ est de justifier, comme dans [29], que  $\partial_{z_1} \phi_\varepsilon / \mathbf{c}_s \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^d)$  est une suite minimisante pour le problème (2.4) ( $d = 2$ ) ou (2.5) ( $d = 3$ ). Par exemple, pour le cas  $d = 3$ , on peut justifier que

$$T_{c(\varepsilon)} \leq \mathbf{c}_s^2 \mathcal{S}_* \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad c(\varepsilon) \equiv \sqrt{\mathbf{c}_s^2 - \varepsilon^2},$$

et l'on remarquera que le membre de gauche, vu (2.3), est lié à l'action de (KP-I). Cette estimation se montre en insérant une fonction test avec  $A = \partial_{z_1} \phi / \mathbf{c}_s$  égal à un "ground state". Le point suivant est d'obtenir des bornes sur l'énergie et le moment. Les solutions de [30], [29] étant des minimiseurs de  $E$  sous contrainte que  $P$  est fixé, cela fournit automatiquement des bornes  $L^2$  sur  $A_\varepsilon$  et  $\partial_{z_1} \phi_\varepsilon$ . Pour la dimension 3, la seule quantité que

nous contrôlons est  $E(U) - c(\varepsilon)P(U)$  et la vitesse  $c(\varepsilon)$ , mais ni  $E$  ni  $P$ . Notre approche repose sur un argument de moyennisation, car la relation de groupe de Hamilton

$$c = \frac{dE}{dP}$$

(que l'on ne prouve pas) entraîne formellement

$$\frac{dT_c}{dc} = \frac{d}{dc}(E - cP) = \frac{dE}{dc} - c \frac{dP}{dc} - P = -P.$$

Noter que  $c \mapsto T_c$  est décroissante lorsque le potentiel  $F$  est positif, donc dérivable presque partout, et par suite la relation précédente est "vraie presque partout" en vitesse  $c$ . Puisque l'on maîtrise la décroissance de  $T_{c(\varepsilon)}$ , un argument de moyennisation permet alors de contrôler, sur (au moins) une suite  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ,  $P$  et donc  $E$ . On en déduit des bornes uniformes au niveau  $L^2$ . L'étape d'après est de justifier le relèvement, *i.e.* que notre solution ne s'annule pas. Dans [29], et plus généralement dès que l'on est en dimension 2, les solutions ont une énergie  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , donc petite. La propriété de relèvement provient (*cf.* [153], [29]) de la régularité elliptique combinée avec le fait que l'énergie contrôle le potentiel, donc  $\|U\|^2 - 1\|_{L^2}$ . Dans nos cas, le potentiel peut prendre des valeurs négatives. Pire : en dimension  $d = 3$ , l'énergie des solutions est  $\sim \varepsilon^{-1}$ , donc grande. Il nous faut donc nous adapter, et notre démonstration s'appuie uniquement sur le fait que  $E(U) - c(\varepsilon)P(U) = (2/(d-1)) \int |\nabla_{\perp} U|^2$  est suffisamment petit ( $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$  en dimension 2,  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  en dimension 3) par rapport à l'énergie.

A ce stade, on sait donc que l'onde ne s'annule pas et la borne sur l'énergie fournit des bornes  $L^2$  sur  $A_{\varepsilon}$  et  $\partial_{z_1} \phi_{\varepsilon}$ . Le point crucial est ensuite l'obtention, à l'aide de l'équation, de bornes Sobolev uniformes, où la difficulté provient de l'anisotropie du changement d'échelle. En suivant [29], on déduit du système (2.7) (en éliminant le terme linéaire en  $\phi_{\varepsilon}$ ) l'équation sur  $A_{\varepsilon}$  suivante :

$$\left\{ \partial_{z_1}^4 - \partial_{z_1}^2 - c_s^2 \Delta_{z_{\perp}} + 2\varepsilon_n^2 \partial_{z_1}^2 \Delta_{z_{\perp}} + \varepsilon_n^4 \Delta_{z_{\perp}}^2 \right\} A_{\varepsilon_n} = Quad_n, \quad (2.10)$$

où les termes de  $Quad_n$  sont au moins quadratiques en  $(A_{\varepsilon_n}, \partial_{z_1} \phi_{\varepsilon_n}, \varepsilon_n \nabla_{z_{\perp}} \phi_{\varepsilon_n})$  :

$$Quad_n \equiv \{ \partial_{z_1}^2 + \varepsilon_n^2 \Delta_{z_{\perp}} \} \left[ (1 + \varepsilon_n^2 A_{\varepsilon_n})^2 \left( (\partial_{z_1} \phi_{\varepsilon_n})^2 + \varepsilon_n^2 |\nabla_{z_{\perp}} \phi_{\varepsilon_n}|^2 \right) + \varepsilon_n^2 \left( (\partial_{z_1} A_n)^2 + \varepsilon_n^2 |\nabla_{z_{\perp}} A_n|^2 \right) \right] + \dots$$

Ceci fait apparaître les noyaux

$$\mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\xi_1^2}{\xi_1^4 + \xi_1^2 + c_s^2 |\xi_{\perp}|^2 + 2\varepsilon_n^2 \xi_1^2 |\xi_{\perp}|^2 + \varepsilon_n^4 |\xi_{\perp}|^4} \right), \quad \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\varepsilon_n^2 |\xi_{\perp}|^2}{\xi_1^4 + \xi_1^2 + c_s^2 |\xi_{\perp}|^2 + 2\varepsilon_n^2 \xi_1^2 |\xi_{\perp}|^2 + \varepsilon_n^4 |\xi_{\perp}|^4} \right), \quad (2.11)$$

où  $\mathcal{F}$  est la transformée de Fourier. Ceux-ci possèdent des propriétés de multiplicateurs de Fourier permettant de montrer à partir de (2.10) que pour  $1 < q < \infty$ ,

$$\begin{aligned} & \|A_{\varepsilon_n}\|_{L^q} + \|\nabla_z A_{\varepsilon_n}\|_{L^q} + \|\partial_{z_1}^2 A_{\varepsilon_n}\|_{L^q} + \varepsilon_n \|\partial_{z_1} \nabla_{z_{\perp}} A_{\varepsilon_n}\|_{L^q} + \varepsilon_n^2 \|\nabla_{z_{\perp}}^2 A_{\varepsilon_n}\|_{L^q} \\ & \leq C_q \left( \|A_{\varepsilon_n}\|_{L^{2q}}^2 + \varepsilon_n^2 \left[ \|\partial_{z_1} A_{\varepsilon_n}\|_{L^{2q}} + \varepsilon_n \|\nabla_{z_{\perp}} A_{\varepsilon_n}\|_{L^{2q}} \right]^2 \right), \end{aligned}$$

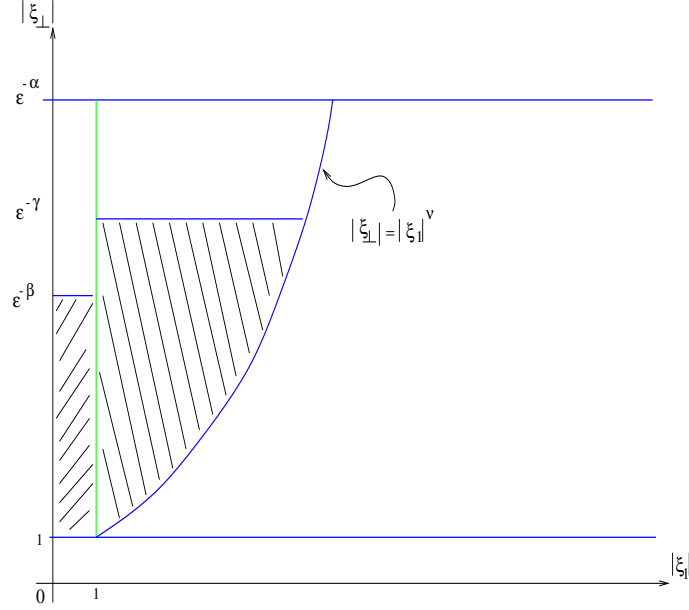
où l'on voit le caractère quadratique de  $Quad_n$  dans le membre de droite. On notera que l'on gagne une dérivée mais dans un autre espace  $L^q$ . Le principe (*cf.* [29]) est alors le suivant : si l'on a une borne de type  $L^p$  sur  $(A_{\varepsilon_n}, \partial_{z_1} \phi_{\varepsilon_n}, \varepsilon_n \nabla_{z_{\perp}} \phi_{\varepsilon_n})$  pour un  $p > 2$ , l'inégalité précédente entraîne une borne  $W^{1,p/2}$ , donc aussi  $L^q$  par injection de Sobolev. Si  $q > p$ , on peut recommencer le procédé. Le point est donc d'avoir une borne  $L^{2^+}$  initiale. Dans [29], où  $d = 2$ , ceci est obtenu en remarquant que les noyaux (2.11) sont déjà dans  $L^{\frac{8}{3}-}$  (uniformément en  $\varepsilon$ ), ce qui amorce la pompe : la borne  $L^{\frac{8}{3}-}$  entraîne une borne  $W^{1, \frac{4}{3}-} \hookrightarrow L^{4-}$  par injection de Sobolev bi-dimensionnelle, puis en recommençant une borne  $W^{1,2-} \hookrightarrow L^p$  pour tout  $2 \leq p < \infty$  en dimension  $d = 2$ , puis, à l'aide d'une nouvelle itération et injection de Sobolev, une borne  $L^{\infty}$ .

En dimension  $d = 3$ , la borne  $L^{2^+}$  sur le noyau n'est plus vraie, car au vu de l'étude de [72], le noyau (pour  $\varepsilon = 0$ )

$$\mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\xi_1^2}{\xi_1^4 + \xi_1^2 + c_s^2 |\xi_{\perp}|^2} \right)$$

n'est très probablement pas dans  $L^p$  si  $p \geq 5/3$  (en dimension  $d = 3$ ). La solution que nous proposons est de découper  $A_{\varepsilon_n}$  dans l'espace de Fourier, selon le schéma ci-dessous (avec  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\nu$  des constantes strictement positives adaptées) :





Seule la partie hachurée est contrôlée à l'aide de l'argument précédent impliquant le noyau. Pour toutes les autres, on utilise les bornes de type énergie (par exemple, une borne sur  $\varepsilon_n \nabla_{z_\perp} A_{\varepsilon_n}$  dans  $L^2$  permet le contrôle des fréquences avec  $|\xi_\perp| \gg \varepsilon^{-1}$ ). Ceci fournit une borne  $L^{\frac{3}{2}-}$  sur  $(A_{\varepsilon_n}, \partial_{z_1} \phi_{\varepsilon_n}, \varepsilon_n \nabla_{z_\perp} \phi_{\varepsilon_n})$ , d'où une borne  $W^{1, \frac{4}{3}-}$ . L'injection de Sobolev  $W^{1, \frac{4}{3}-} \hookrightarrow L^{\frac{12}{5}-}$  en 3d n'est pas ici d'une grande aide, car malheureusement  $12/5 = 2,4 < 8/3 = 2,6666\dots$ . Pour améliorer l'intégrabilité, on refait un découpage en Fourier du type précédent en utilisant la nouvelle borne  $L^{4/3}$  sur le gradient, ce qui fournit une borne  $W^{1, \frac{3}{2}-}$  sur  $(A_{\varepsilon_n}, \partial_{z_1} \phi_{\varepsilon_n}, \varepsilon_n \nabla_{z_\perp} \phi_{\varepsilon_n})$ . A ce stade, le problème est que  $W^{1, \frac{3}{2}-} \hookrightarrow L^{3-}$  en dimension  $d = 3$ , ce qui n'améliore toujours pas l'intégrabilité. Ceci est contourné en utilisant une injection de Sobolev anisotrope, permettant de passer à  $L^{3,6-}$ , et une nouvelle itération donne une borne  $L^\infty$  car  $3,6 > d = 3$ . Une fois ces bornes  $L^p$  établies, les bornes  $W^{s,p}$  se fait exactement comme dans [29]. Noter que le découpage dans l'espace de Fourier en dimension  $d = 2$  (le cas de [29]) permettrait d'obtenir une borne initiale  $L^{4-}$  au lieu de  $L^{\frac{8}{3}-}$ , ce qui est certes mieux, mais pas indispensable vu le gros gain d'intégrabilité apporté par les inégalités de Sobolev bi-dimensionnelles. Une fois ces bornes Sobolev établies, il est aisé de voir que les développements formels de l'énergie et du moment ne le sont plus, et justifie que  $\partial_{z_1} \phi_{\varepsilon_n} / \mathbf{c}_s \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^d)$  est une suite minimisante pour le problème (2.4) ( $d = 2$ ) ou (2.5) ( $d = 3$ ). Etant donné que ces problèmes ont des propriétés de compacité, on en déduit la convergence d'une sous-suite de  $\partial_{z_1} \phi_{\varepsilon_n} / \mathbf{c}_s$  vers un "ground state" de (KP-I) (de vitesse  $1/(2\mathbf{c}_s)$ ) dans  $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ . Enfin, les convergences dans tous les Sobolev proviennent des bornes uniformes et de résultats d'interpolation.

*Un mot sur l'hypothèse  $\Gamma \neq 0$  dans les théorèmes 3 et 4.* Lorsque l'on applique l'argument de concentration-compacité, nous devons exclure le "vanishing". Il est alors naturel d'étudier le comportement de  $E_{\min}$  et  $I_{\min}$  quand  $\mathbf{p}$  et  $k$  sont petits, ce qui nous amène à considérer la limite (KP-I). De fait, si  $\Gamma \neq 0$ , l'équation (KP-I) possède des "ground states". Il se trouve qu'en dimension  $d = 2$  ou  $d = 3$ , l'ansatz (KP-I) fournit des fonctions de comparaison  $U_\varepsilon$  pour lesquelles on peut développer en  $\varepsilon$  le moment et l'énergie, pour obtenir

$$E(U_\varepsilon) - \mathbf{c}_s P(U_\varepsilon) \sim (5 - 2d) \mathbf{c}_s^2 \mathcal{S}_{\min} \varepsilon^{7-2d}.$$

Puisque  $\mathcal{S}_{\min} > 0$ , si  $d = 2$ , alors  $5 - 2d = 1 > 0$  et nous avons donc construit des fonctions de comparaison avec  $E(U_\varepsilon) < \mathbf{c}_s P(U_\varepsilon) \ll 1$ , et par suite  $E_{\min}(\mathbf{p}) < \mathbf{c}_s \mathbf{p}$  pour  $\mathbf{p}$  petit, ce qui était le point crucial. Cependant, si  $d = 3$ , les fonctions de comparaison sont telles que  $E(U_\varepsilon) > \mathbf{c}_s P(U_\varepsilon) \gg 1$ , et si  $\Gamma = 0$ , il n'y a plus d'onde solitaire pour  $d \geq 2$ .

Remarquons qu'en fait, seulement l'existence d'ondes solitaires non triviales de (KP-I) suffisent pour avoir  $E_{\min}(\mathbf{p}) < \mathbf{c}_s \mathbf{p}$  pour  $\mathbf{p}$  petit. En effet, le caractère "ground state" n'apparaît pas à ce stade.

Nous pouvons résumer nos résultats en dimensions  $d = 2$  et  $d = 3$  à l'aide des diagrammes suivants :

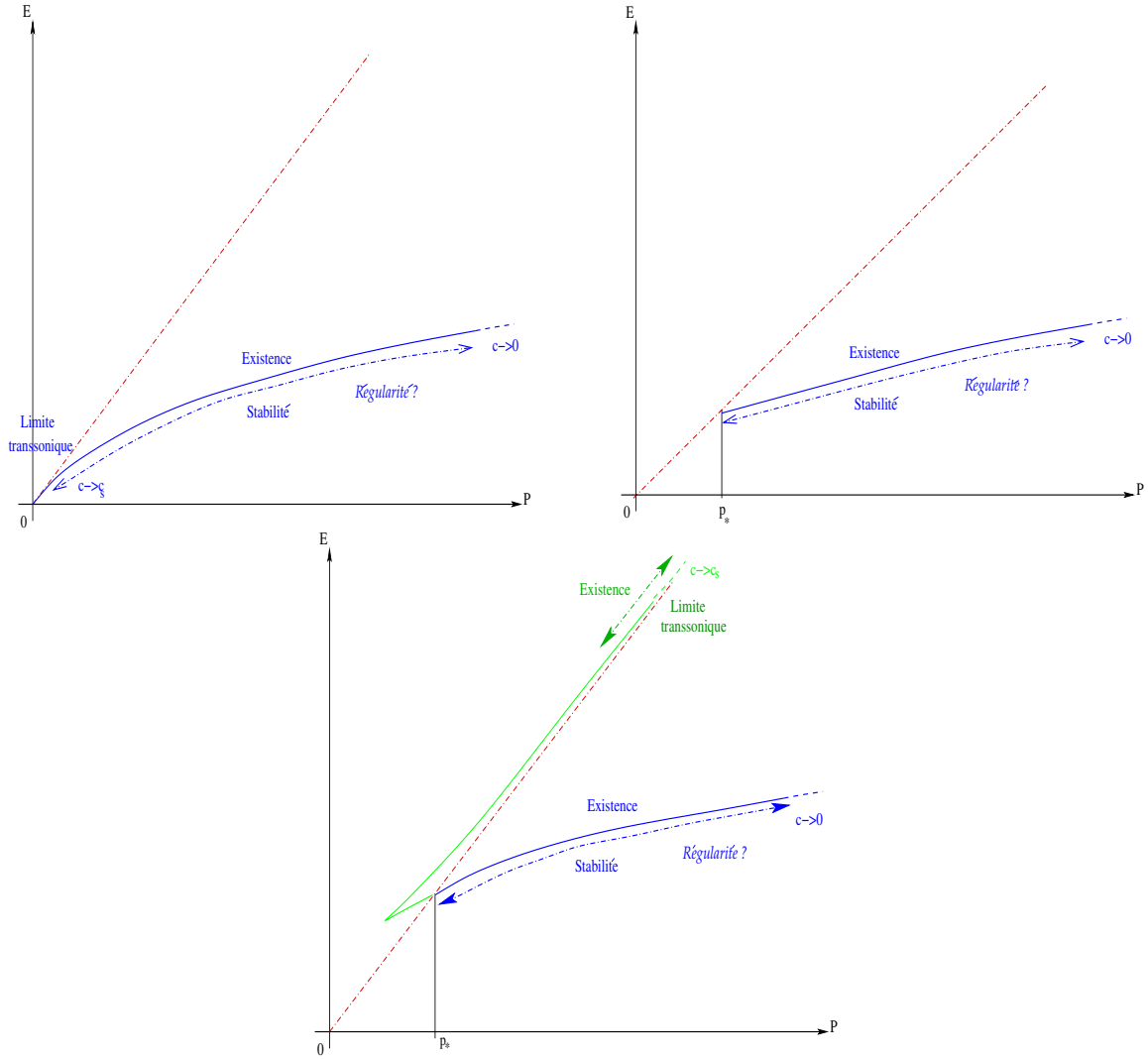


FIGURE 2.2 – Diagrammes  $(E, P)$  quand : (a)  $d = 2$  et  $\Gamma \neq 0$ ; (b)  $d = 2$  et  $\Gamma = 0$ ; (c)  $d = 3$

### 2.3 Ondes progressives pour une nonlinéarité générale en 1d

Jusqu'à présent, nous avons laissé de côté le cas mono-dimensionnel, qui se trouve un peu à part, essentiellement à cause de la condition à l'infini. En effet, en dimension  $d \geq 2$ , les ondes progressives (d'énergie finie) tendent vers 1 à l'infini (modulo la multiplication par un facteur de phase  $e^{i\theta}$ , voir [74]), alors qu'en dimension  $d = 1$ , le comportement à l'infini est plutôt

$$U(x) \rightarrow e^{i\theta_+} \quad x \rightarrow +\infty, \quad U(x) \rightarrow e^{i\theta_-} \quad x \rightarrow -\infty,$$

avec  $\theta_- \neq \theta_+ \pmod{2\pi}$  en général, et il faut tenir compte du déphasage  $\theta_+ - \theta_- \pmod{2\pi}$  dans la définition du moment. En effet, si  $d = 1$ , il est facile de voir que toutes les ondes progressives ne s'annulent pas, sauf peut-être celle pour  $c = 0$ . Pour ces ondes  $U = Ae^{i\phi}$  qui ne s'annulent pas, on définit le moment comme (voir [11], [102])

$$P(U) \equiv \int_{\mathbb{R}} (A^2 - r_0^2) \partial_x \phi \, dx,$$

qui n'est plus équivalente à

$$\int_{\mathbb{R}} \langle i(U - r_0), \partial_x U \rangle \, dx \quad \text{ou} \quad \int_{\mathbb{R}} \langle iU, \partial_x U \rangle \, dx,$$

étant donné les limites à l'infini. A ce stade, nous n'avons pas défini le moment pour une fonction quelconque d'énergie finie.

En dimension 1 et pour la nonlinéarité de Gross-Pitaevskii, il est possible d'intégrer explicitement ( $TW_c$ ), c'est-à-dire

$$\partial_x^2 U = Uf(|U|^2) + ic\partial_x U,$$

lorsque  $0 \leq c < c_s = \sqrt{2}$  (voir [155], [31]), ce qui donne

$$U_c(x) = \sqrt{\frac{2-c^2}{2}} \tanh\left(x \frac{\sqrt{2-c^2}}{2}\right) - i \frac{c}{\sqrt{2}}$$

et les valeurs de l'énergie et du moment sont :

$$E(U_c) = \frac{1}{3}(2-c^2)^{\frac{3}{2}} \quad P(U_c) = \arctan\left(\frac{\sqrt{2-c^2}}{c}\right) - \frac{c}{2}\sqrt{2-c^2}.$$

Il n'y a pas d'onde pour  $c \geq c_s$  mais une onde pour  $c = 0$ , appelé le "kink"

$$U_0(x) = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Celui-ci présente la particularité de s'annuler à l'origine, et même d'être la seule onde à s'annuler. Le diagramme énergie-moment est alors le suivant, où la droite rouge est donnée par  $E = c_s P$ .

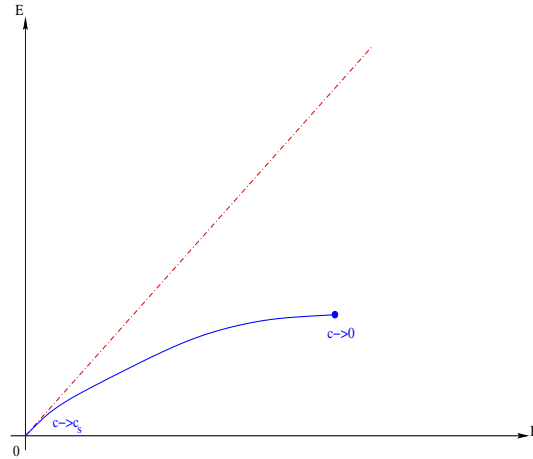


FIGURE 2.3 – Diagramme  $(E, P)$  pour (GP) en dimension  $d = 1$

En dimension  $d = 1$ , ( $TW_c$ ) est une équation différentielle pour  $U = Ae^{i\phi}$  que l'on peut ramener au système suivant :

$$A^2 \partial_x \phi = \frac{c}{2} \eta, \quad \eta'' + \frac{1}{2} \mathcal{V}'(\eta) - \varepsilon^2 \eta = 0, \quad \text{où} \quad \eta \equiv |U|^2 - r_0^2 = A^2 - r_0^2$$

et où  $\mathcal{V}$  désigne la fonction

$$\mathcal{V}(s) \equiv c_s^2 s^2 - 4(r_0^2 + s)F(r_0^2 + s).$$

Il est alors assez clair qu'il suffit de résoudre l'équation pour  $\eta$ , que l'on peut ré-écrire sous forme d'une équation de Newton

$$2\eta'' + \mathcal{V}'_\varepsilon(\eta) = 0, \quad \text{avec} \quad \mathcal{V}_\varepsilon(s) \equiv \mathcal{V}(s) - \varepsilon^2 s^2.$$

Il suffit donc de tracer le potentiel  $\mathcal{V}_\varepsilon$  pour savoir s'il y a une solution  $\eta$  tendant vers 0 en  $\pm\infty$ . Pour la nonlinéarité de Gross-Pitaevskii, on a  $r_0 = 1$ ,  $c_s = \sqrt{2} \simeq 1.4142$ , et des fonctions  $F$  et  $\mathcal{V}$  qui sont

$$F(\varrho) = \frac{1}{2}(\varrho - 1)^2, \quad \mathcal{V}(s) = -2s^3$$

et les graphes de  $f$ ,  $F$  et  $\mathcal{V}$  sont donc

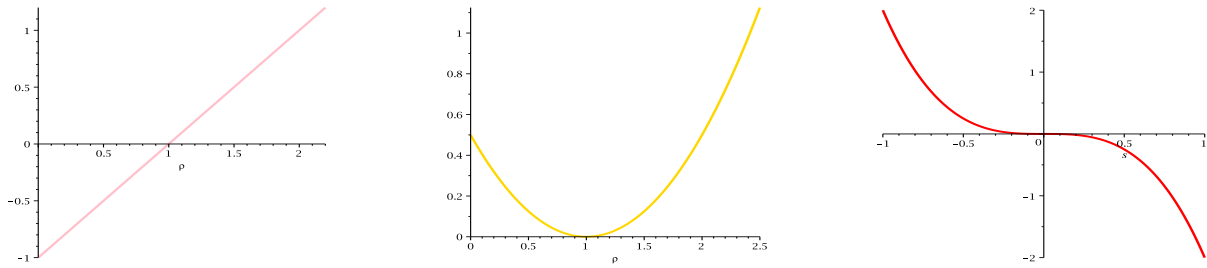


FIGURE 2.4 – Graphes de (a)  $f$ , (b)  $F$  et (c)  $\mathcal{V}$ .

### 2.3.1 Etude d'exemples

On étudie maintenant les exemples détaillés dans  $[\mathcal{A}_8]$ . A chaque fois, on trace le diagramme énergie-moment et les fonctions  $f$ ,  $F$  et  $\mathcal{V}$ . Des observations sont faites après chaque exemple. Notre méthode ne consiste pas à résoudre numériquement ( $TW_c$ ), puisque le graphe du potentiel  $\mathcal{V}_\varepsilon$  suffit pour l'existence/la non-existence des ondes. Cependant, on peut ré-écrire le moment  $P$  et l'énergie  $E$  en terme d'intégrales portant sur l'intervalle d'extrémités  $r_0$  et le max/min de  $|U|$ . Ces deux intégrales sont évaluées numériquement, et cela permet de tracer le diagramme  $(E, P)$ . En particulier, nous obtenons *toutes* les ondes progressives non triviales. Insistons sur le fait que les propriétés qualitatives (existence, comportement près d'une vitesse critique...) des ondes sont profondément liées au graphique de la fonction  $\mathcal{V}$  plutôt qu'à celui de la nonlinéarité  $f$ . En particulier, on souligne que pour les premiers exemples, les nonlinéarités  $f$  ont le même comportement qualitatif que la nonlinéarité (GP) (*i.e.*  $f$  strictement croissante, tendant vers  $+\infty$  en  $+\infty$ ), et donc le potentiel  $F$  a la même allure que celui de (GP), mais les fonctions  $\mathcal{V}$  associés ont des graphes très différents.

**Exemple 1.**

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\varrho) \equiv (\varrho - 1) - \frac{3}{2}(\varrho - 1)^2 + \frac{3}{2}(\varrho - 1)^3 \\ F(\varrho) = \frac{1}{2}(\varrho - 1)^2 - \frac{1}{2}(\varrho - 1)^3 + \frac{3}{8}(\varrho - 1)^4 \\ \mathcal{V}(s) = \frac{s^4}{2} - \frac{3s^5}{2}. \end{array} \right. \quad r_0 = 1, \quad \mathfrak{c}_s^2 = 2, \quad \Gamma = 0 \quad \text{et} \quad \Gamma' = -6.$$

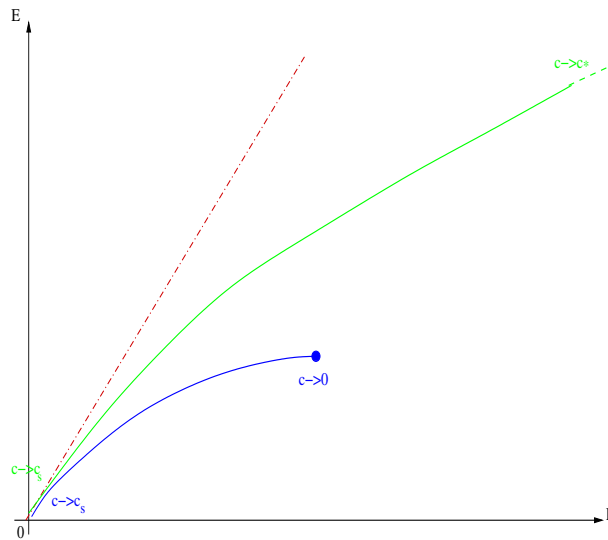


FIGURE 2.5 – Diagramme  $(E, P)$  pour l'exemple 1

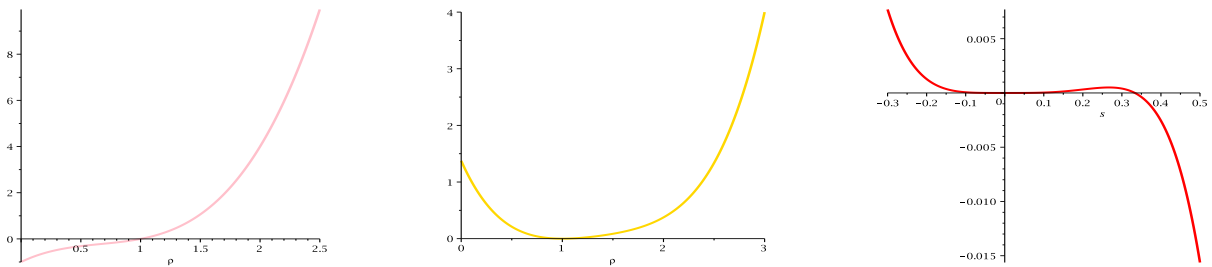


FIGURE 2.6 – Graphes de (a)  $f$ , (b)  $F$  et (c)  $\mathcal{V}$

**Commentaires.** On observe *deux* branches de solutions. Celle du bas est analogue à celle de (GP), mais celle d'en haut diverge pour une vitesse  $c_* \in ]0, \mathfrak{c}_s[$  en énergie et en moment : la solution converge vers une solution de  $(\text{TW}_{c_*})$  du type  $\alpha e^{i\beta x}$  qui ne vérifie pas les conditions à l'infini. C'est à notre connaissance le premier résultat de multiplicité de ce type. Notons aussi qu'il n'est pas possible de prouver un résultat général de décroissance exponentielle uniforme pour les solutions associées à des vitesses dans un intervalle compact  $[c_{\min}, c_{\max}] \subset ]0, \mathfrak{c}_s[$ .

**Exemple 2.**

$$\begin{cases} f(\varrho) \equiv 4(\varrho - 1) + 36(\varrho - 1)^3 \\ F(\varrho) = 2(\varrho - 1)^2 + 9(\varrho - 1)^4 \\ \mathcal{V}(s) = -8s^3 - 36s^4 - 36s^5. \end{cases} \quad r_0 = 1, \quad \mathfrak{c}_s^2 = 8 \quad \text{et} \quad \Gamma = 6.$$

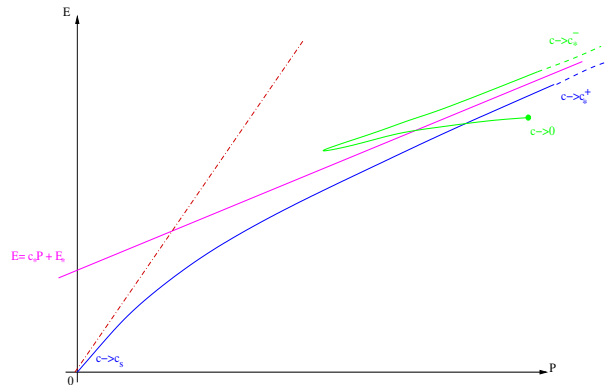


FIGURE 2.7 – Diagramme  $(E, P)$  pour l'exemple 2

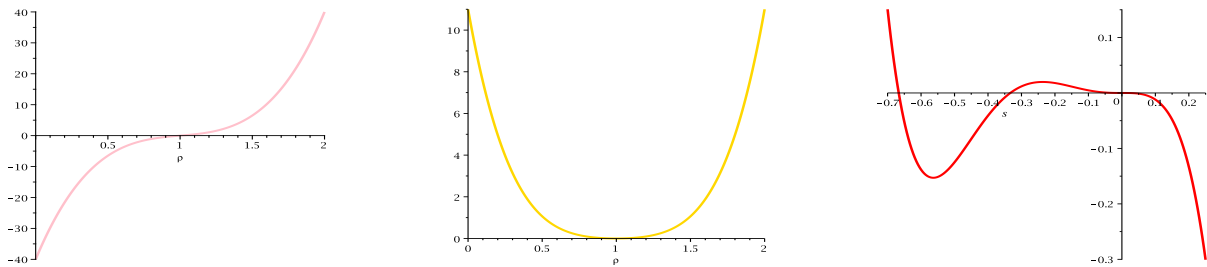


FIGURE 2.8 – Graphes de (a)  $f$ , (b)  $F$  et (c)  $\mathcal{V}$

**Commentaires.** Cet exemple nous montre que, contrairement à ce qui est usuellement attendu, l'ensemble des vitesses pour lesquelles il existe des ondes progressives non triviales peut être différent de  $[0, \mathfrak{c}_s[$ , puisqu'ici il est du type  $[0, c_*[ \cup ]c_*, \mathfrak{c}_s[$  pour une vitesse  $0 < c_* < \mathfrak{c}_s$ . En outre, on observe un point de rebroussement comme c'est le cas pour (GP) tri-dimensionnelle (voir [95]). A notre connaissance, c'est la première fois que l'on met en évidence un tel point de rebroussement pour une nonlinéarité  $f$  telle que  $F$  est positif (voir cependant plus bas le cas de la nonlinéarité cubique-quintique).

**Exemple 3.**

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\varrho) \equiv \frac{1}{2}(\varrho - 1) - \frac{3}{4}(\varrho - 1)^2 + 2(\varrho - 1)^3 \\ F(\varrho) = \frac{1}{4}(\varrho - 1)^2 - \frac{1}{4}(\varrho - 1)^3 + \frac{1}{2}(\varrho - 1)^4 \\ \mathcal{V}(s) = -s^4 - 2s^5. \end{array} \right. \quad r_0 = 1, \quad c_s^2 = 1, \quad \Gamma = 0 \quad \text{et} \quad \Gamma' = 24 > 0.$$

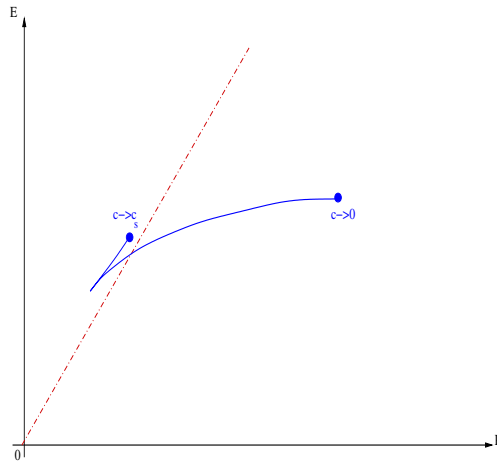


FIGURE 2.9 – Diagramme  $(E, P)$  pour l'exemple 3

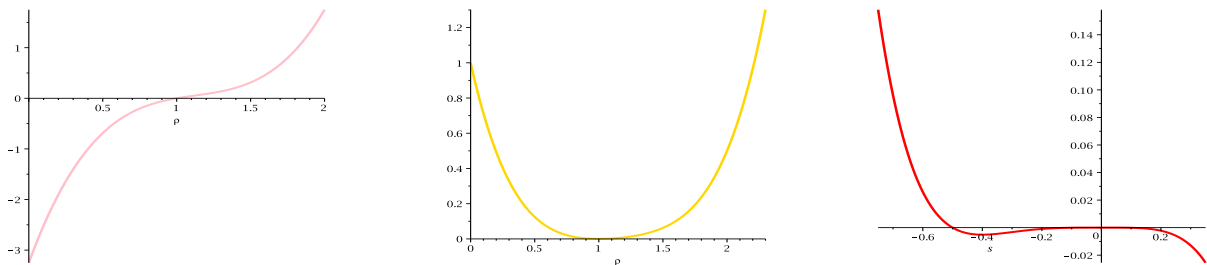


FIGURE 2.10 – Graphes de (a)  $f$ , (b)  $F$  et (c)  $\mathcal{V}$

**Commentaires.** Le diagramme  $(E, P)$  ci-dessus permet de constater qu'il n'existe pas d'onde progressive avec énergie ou moment petits (contrairement au cas (GP)). Dans la limite transsonique, on a convergence vers une onde *sonique* non triviale. Nous avons aussi un nouvel exemple avec un point de rebroussement.

**Exemple 4.**

$$\begin{cases} f(\varrho) \equiv 2(\varrho - 1) - 3(\varrho - 1)^2 + 4(\varrho - 1)^3 - 5(\varrho - 1)^4 + 6(\varrho - 1)^5 \\ F(\varrho) = (\varrho - 1)^2 - (\varrho - 1)^3 + (\varrho - 1)^4 - (\varrho - 1)^5 + (\varrho - 1)^6 \\ \mathcal{V}(s) = -4s^7. \end{cases} \quad r_0 = 1, \quad \mathfrak{c}_s^2 = 4, \quad \text{et} \quad \Gamma = \Gamma' = \dots = 0.$$

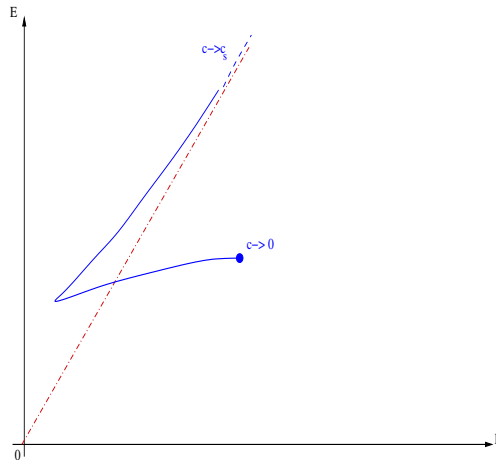


FIGURE 2.11 – Diagramme  $(E, P)$  pour l'exemple 4

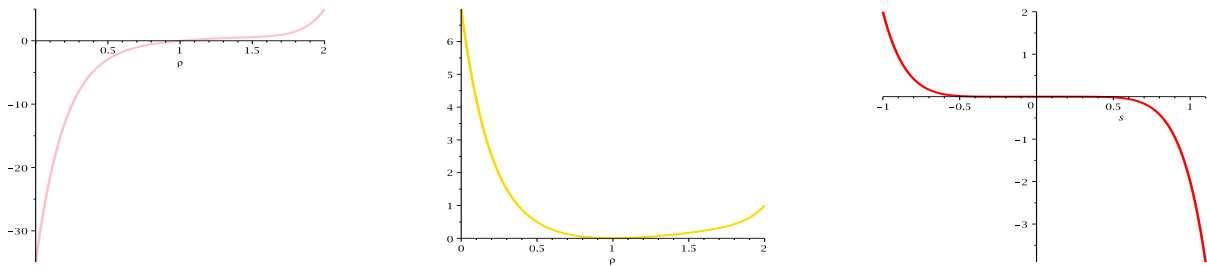


FIGURE 2.12 – Graphes de (a)  $f$ , (b)  $F$  et (c)  $\mathcal{V}$

**Commentaires.** Comme dans l'exemple 3, il n'existe pas d'onde progressive avec énergie ou moment petits, et nous avons une fois encore un point de rebroussement. De plus, ici, la limite transsonique fournit une branche divergente en énergie et moment, ce qui donne un diagramme  $(E, P)$  très proche de celui de (GP) en dimension  $d = 3$ . La divergence pour  $c \rightarrow \mathfrak{c}_s$  est relativement lente, donc difficile à capturer numériquement. Toutefois, on verra que nous avons l'asymptote  $E = \mathfrak{c}_s P$ .



**Exemple 5.**

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\varrho) \equiv 1 - \exp\left(\frac{1-\varrho}{0.4}\right) \\ F(\varrho) = \varrho_0 \left\{ \exp\left(\frac{1-\varrho}{\varrho_0}\right) - 1 - \frac{1-\varrho}{\varrho_0} \right\} \\ \mathcal{V}(s) = \frac{2}{\varrho_0} s^2 - 4\varrho_0(1+s) \left\{ \exp\left(-\frac{s}{\varrho_0}\right) - 1 + \frac{s}{\varrho_0} \right\}. \end{array} \right. \quad r_0 = 1, \quad c_s^2 = 5 \quad \text{et} \quad \Gamma = 1.$$

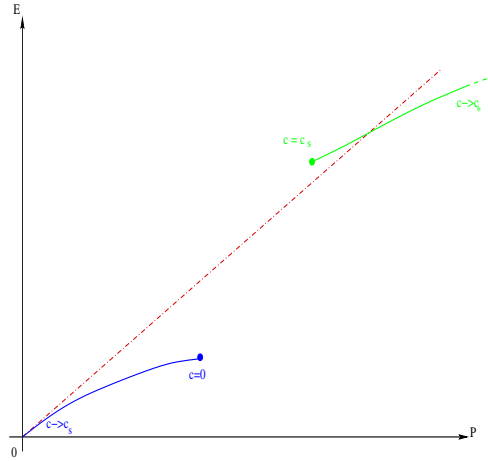


FIGURE 2.13 – Diagramme  $(E, P)$  pour l'exemple 5

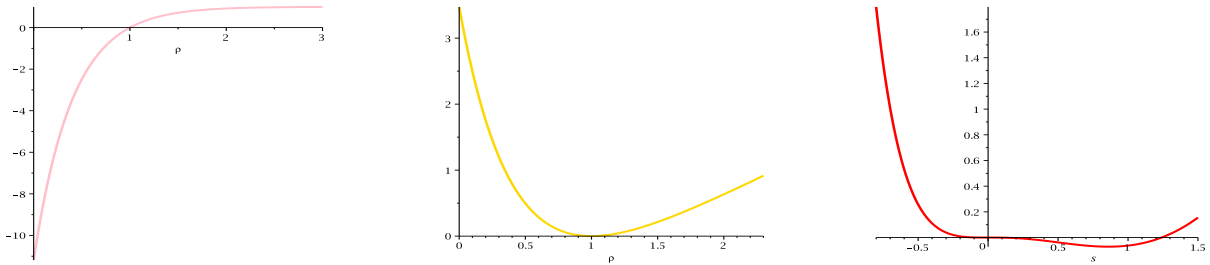


FIGURE 2.14 – Graphes de (a)  $f$ , (b)  $F$  et (c)  $\mathcal{V}$

**Commentaires.** Ce genre de nonlinéarité présente un effet de saturation : lorsque  $\varrho$  est grand,  $f(\varrho) \rightarrow 1$ . Celle-ci peut être trouvée, par exemple, dans [101]. Soulignons deux points qui apparaissent pour cette nonlinéarité. D'une part, pour les vitesses proches de la vitesse du son  $c_s$ , nous avons *deux* solutions, l'une d'énergie et moment petits, et l'autre d'énergie et moment d'ordre un. D'autre part, dû à l'effet de saturation, les ondes progressives ne sont pas uniformément bornées par rapport à la vitesse : on obtient une branche d'onde qui explose dans  $L^\infty$  lorsque  $c \rightarrow c_* = 4$ . En effet, une telle borne uniforme existe pour les nonlinéarités coercives à l'infini en se basant sur le principe du maximum. Mais ici, ceci ne s'applique plus car la "nonlinéarité"  $\Psi f(|\Psi|^2)$  devient linéaire  $\simeq \Psi$  pour  $|\Psi|$  grand. Ces deux effets peuvent bien sûr être rencontrés séparément. Mentionnons aussi que, sur cet exemple, il n'existe pas d'onde progressive non triviale pour, et uniquement pour des moments  $0 < P \leq 3.02$  et  $P \geq 4.33$ .

**Exemple 6 : la nonlinéarité cubique-quintique.**

Les graphiques ci-dessus sont tirés de l'article [11] de I. Barashenkov et E. Panova.

$$\begin{cases} f(\varrho) \equiv (\varrho - 1) + 3(\varrho - 1)^2 \\ F(\varrho) = \frac{1}{2}(\varrho - 1)^2 + (\varrho - 1)^3 \\ \mathcal{V}(s) = -6s^3 - 4s^4. \end{cases} \quad r_0 = 1, \quad \mathfrak{c}_s^2 = 2 \quad \text{et} \quad \Gamma = 24.$$

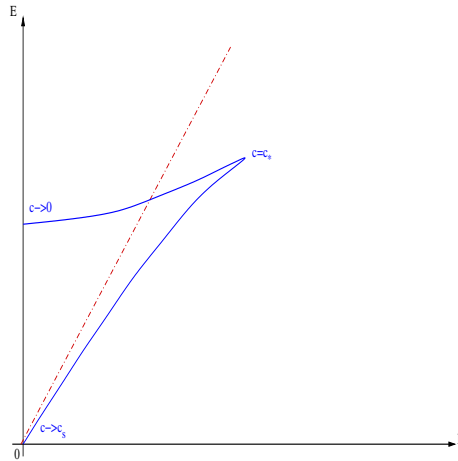


FIGURE 2.15 – Diagramme  $(E, P)$  pour l'exemple 6

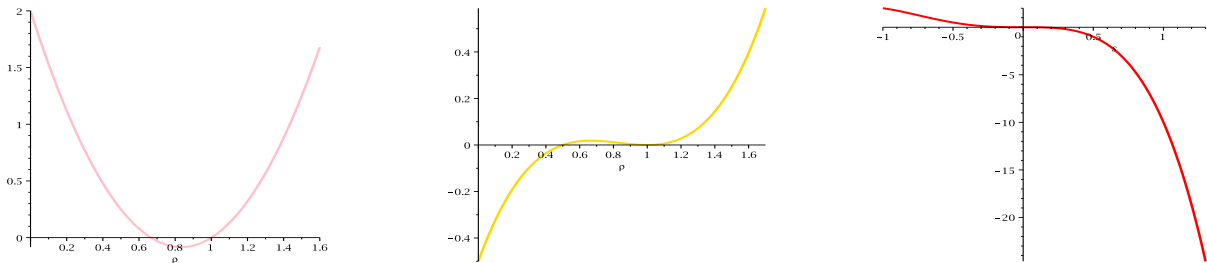


FIGURE 2.16 – Graphes de (a)  $f$ , (b)  $F$  et (c)  $\mathcal{V}$

**Commentaires.** Cette nonlinéarité présente la particularité que pour  $\varrho$  petit, le potentiel  $F$  et  $f'$  sont négatifs. Nous avons un point de rebroussement avec  $P$  et  $E$  localement maximaux (et non minimaux comme avant). A la place du "kink", nous avons ici pour  $c = 0$  une solution stationnaire qui ne s'annule pas, et qui va prendre des valeurs dans la région où  $F < 0$ .

### 2.3.2 Résultats mathématiques

**Dépendance continue par rapport à la vitesse.** Il est tout d'abord aisé de montrer, grâce à l'équation de Newton

$$2\eta'' + \mathcal{V}'_\varepsilon(\eta) = 0$$

avec la condition à l'infini  $\eta \rightarrow 0$  (la phase sera alors automatiquement calculable par intégration), un résultat d'unicité locale (en vitesse) et de dépendance régulière (pour cette unique solution locale) par rapport au paramètre  $c$ . En effet, lorsque l'on a une solution non triviale  $\eta$  pour la vitesse  $c$ , cela signifie que  $\mathcal{V}_\varepsilon$  est  $< 0$  sur un intervalle  $]0, z[$  (ou  $]z, 0[$ ) avec  $\mathcal{V}_\varepsilon(z) = 0 < \mathcal{V}'_\varepsilon(z)$  (ou  $\mathcal{V}_\varepsilon(z) = 0 > \mathcal{V}'_\varepsilon(z)$ ), ce qui est visiblement stable par perturbation. En outre, la dépendance régulière de l'onde par rapport à  $c$  suffit à démontrer la relation de groupe d'Hamilton

$$c = \frac{dE}{dP},$$

ou plus précisément

$$\frac{dE}{dc} = c \frac{dP}{dc}.$$

Par suite, lorsque l'on trace les graphes  $c \mapsto E(U_c)$  et  $c \mapsto P(U_c)$ , les points critiques de l'un sont ceux de l'autre (sauf  $c = 0$ ), comme par exemple les minima locaux qui donnent les points de rebroussement.

**Stabilité.** L'article de Z. Lin [122] permet d'écrire le résultat suivant sur la stabilité de ces ondes. On rappelle que toute onde progressive non triviale fait partie d'une branche locale  $c \mapsto U_c$  de solutions. La (semi-)distance utilisée est la suivante

$$d(\Psi = Ae^{i\phi}, \tilde{\Psi} = \tilde{A}e^{i\tilde{\phi}}) \equiv \|A - \tilde{A}\|_{H^1(\mathbb{R})} + \|\partial_x \phi - \partial_x \tilde{\phi}\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

L'approche de Z. Lin repose sur une adaptation de la théorie de Grillakis-Shatah-Strauss [81] et de [38] appliquée à la forme hydrodynamique (1.1) de (NLS). En particulier, elle n'est pas valable pour le "kink" ( $c = 0$ ) puisque celui-ci s'annule. Par contre, pour  $0 < c \leq \mathbf{c}_s$ , s'il existe une onde, elle ne s'annule pas.

**Théorème 8** ([122]). *On suppose que pour un  $0 < c_* < \mathbf{c}_s$ , il existe une onde progressive non triviale  $U_{c_*}$ .*

- (i) Si  $\left. \frac{dP(U_c)}{dc} \right|_{c=c_*} < 0$ , alors  $U_{c_*}$  est orbitalement stable pour la distance  $d$ .
- (ii) Si  $\left. \frac{dP(U_c)}{dc} \right|_{c=c_*} > 0$ , la solution  $U_{c_*}$  est orbitalement instable pour la distance  $d$ .

Lorsque  $c = 0$ , on dispose du résultat suivant, valable uniquement si l'onde stationnaire ne s'annule pas (on parle de "bubble"). Ce résultat est dû à A. de Bouard [54] (et vaut en dimension supérieure à un). On peut le retrouver via la preuve du théorème 8 en dimension  $d = 1$  (la forme hydrodynamique reste valable car le "bubble" ne s'annule pas, et la décomposition spectrale utilisée vaut là encore).

**Théorème 9** ([54]). *On suppose que  $U_0$  est une onde progressive non triviale stationnaire ( $c = 0$ ) qui ne s'annule pas. Alors,  $\left. \frac{dP(U_c)}{dc} \right|_{c=0} > 0$  et la solution  $U_0$  est orbitalement instable pour la distance  $d$ .*

**Rq 1.** Le théorème 8 ne s'applique pas tel quel si  $c = \mathbf{c}_s$  (et pour une onde non triviale) à cause d'une hypothèse spectrale qui n'est plus satisfaite.

**Limite transsonique.** Concernant la limite transsonique dans le cas  $\Gamma \neq 0$ , on démontre le résultat suivant, analogue au théorème 7, mais en utilisant des techniques d'e.d.o. sur l'équation de Newton. On notera que l'équation des ondes progressives pour (KdV) s'écrit ici

$$\frac{1}{\mathbf{c}_s^2} \partial_z A + \Gamma A \partial_z A - \frac{1}{\mathbf{c}_s^2} \partial_z^3 A = 0,$$

et que l'onde solitaire est alors

$$w(z) \equiv -\frac{3}{\mathbf{c}_s^2 \Gamma \cosh^2(z/2)}.$$

Nous avons alors justifié la convergence vers l'onde solitaire de (KdV) dans la limite transsonique avec des techniques d'équations différentielles (c'est le pendant 1d du théorème 7).

**Théorème 10.** [A<sub>8</sub>] On suppose  $\Gamma \neq 0$ . Alors, il existe  $\delta > 0$  et  $0 < \mathbf{c}_0 < \mathbf{c}_s$  avec les propriétés suivantes. Pour toute vitesse  $\mathbf{c}_0 \leq c < \mathbf{c}_s$ , il existe une solution  $U_c$  de  $(\text{TW}_c)$  satisfaisant  $\| |U_c| - r_0 \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \delta$ . Si  $\mathbf{c}_0 \leq c < \mathbf{c}_s$  et si  $u$  est une onde progressive non triviale de  $(\text{TW}_c)$  vérifiant  $\| |u| - r_0 \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \delta$ , alors il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $\xi \in \mathbb{R}$  tels que  $u(x) = e^{i\theta} U_c(x - \xi)$ . La solution  $U_c$  peut s'écrire

$$U_c(x) = r_0 \left( 1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon(z) \right) \exp(i\varepsilon \phi_\varepsilon(z)) \quad \varepsilon = \sqrt{\mathbf{c}_s^2 - c^2}, \quad z \equiv \varepsilon x,$$

et pour tout  $s \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq p \leq \infty$ ,

$$\partial_z \phi_\varepsilon \rightarrow \mathbf{c}_s w \quad \text{et} \quad A_\varepsilon \rightarrow w \quad \text{dans} \quad W^{s,p}(\mathbb{R}) \quad \text{lorsque} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Finalement, quand  $c \rightarrow \mathbf{c}_s$ ,

$$E(U_c) \sim \mathbf{c}_s P(U_c) \sim \frac{48r_0^2}{\mathbf{c}_s^2 \Gamma^2} \left( \mathbf{c}_s^2 - c^2 \right)^{\frac{3}{2}} = \varepsilon^3 \frac{48r_0^2}{\mathbf{c}_s^2 \Gamma^2} \quad \text{et} \quad E(U_c) - cP(U_c) \sim \frac{48r_0^2}{5\mathbf{c}_s^4 \Gamma^2} \left( \mathbf{c}_s^2 - c^2 \right)^{\frac{5}{2}} = \frac{48r_0^2}{5\mathbf{c}_s^4 \Gamma^2} \varepsilon^5.$$

Dans le cas où  $\Gamma = 0$ , on peut faire l'ansatz

$$U_c(x) = r_0 \left( 1 + \varepsilon A_\varepsilon(z) \right) \exp(i\phi_\varepsilon(z)) \quad \varepsilon = \sqrt{\mathbf{c}_s^2 - c^2}, \quad z \equiv \varepsilon x,$$

et de manière tout à fait similaire à l'obtention formelle de la dynamique de (KdV)/(KP-I) cubique indiquée à la fin du premier chapitre, obtenir l'équation des ondes solitaires de (KdV) généralisée

$$\frac{1}{\mathbf{c}_s^2} \partial_z A + \Gamma' A^2 \partial_z A - \frac{1}{\mathbf{c}_s^2} \partial_z^3 A = 0, \quad (\text{SW}')$$

où le coefficient  $\Gamma'$  est donné par

$$\Gamma' = \frac{4f'''(1)}{\mathbf{c}_s^2} - 24.$$

L'équation est alors focalisante si  $\Gamma' < 0$  et a des ondes solitaires, et défocalisante quand  $\Gamma' > 0$  et n'a pas d'ondes solitaires. De fait, pour  $\Gamma' < 0$ , on a deux ondes solitaires opposées

$$w'_\pm(z) \equiv \pm \frac{\sqrt{-6/(\Gamma' \mathbf{c}_s^2)}}{\cosh(z)}.$$

Vue l'invariance de l'équation par  $A \leftrightarrow -A$ , les solutions vont donc par deux. Pour les ondes progressives de (NLS), on prouve alors naturellement le résultat de multiplicité suivant, à rapprocher de l'exemple 1.

**Théorème 11.** [A<sub>8</sub>] On suppose  $\Gamma = 0 > \Gamma'$ . Alors, il existe  $0 < \mathbf{c}_0 < \mathbf{c}_s$  tel que pour tout  $0 < \mathbf{c}_0 < c < \mathbf{c}_s$ , il existe exactement deux ondes progressives  $U_c^\pm$  de vitesse  $c$ . De plus,

$$U_c^\pm(x) = r_0 \left( 1 + \varepsilon A_\varepsilon^\pm(z) \right) \exp(i\phi_\varepsilon^\pm(z)), \quad \varepsilon = \sqrt{\mathbf{c}_s^2 - c^2}, \quad z = \varepsilon x,$$

avec

$$A_\varepsilon^\pm \rightarrow w^\pm \quad \text{et} \quad \partial_z \phi_\varepsilon^\pm / \mathbf{c}_s \rightarrow w^\pm$$

dans tous les espaces  $W^{s,p}(\mathbb{R})$ ,  $s \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . En outre, lorsque  $c \rightarrow \mathbf{c}_s$ ,

$$E(U_c^\pm) \sim \mathbf{c}_s P(U_c^\pm) \sim -\frac{24r_0^2}{\Gamma'} \left( \mathbf{c}_s^2 - c^2 \right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{24r_0^2}{\Gamma'} \varepsilon \quad \text{et} \quad E(U_c^\pm) - cP(U_c^\pm) \sim -\frac{8r_0^2}{\mathbf{c}_s^2 \Gamma'} \left( \mathbf{c}_s^2 - c^2 \right)^{\frac{3}{2}} = -\frac{8r_0^2}{\mathbf{c}_s^2 \Gamma'} \varepsilon^3.$$

Ceci est un argument en faveur de la justesse de la dynamique formelle de (gKdV) à la fin du chapitre 1. Bien sûr, il est possible de pousser plus loin en supposant que  $\Gamma'$  s'annule. Si  $f$  est suffisamment régulière et que  $\mathcal{V}(s) = Ks^m + \mathcal{O}(s^{m+1})$  quand  $s \rightarrow 0$ , avec  $K \neq 0$  et  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 3$ , l'ansatz naturel sera

$$U_{c(\varepsilon)}(x) = r_0 \left( 1 + \varepsilon^{\frac{2}{m-2}} A_\varepsilon(z) \right) \exp(i\varepsilon^{\frac{4-m}{m-2}} \phi_\varepsilon(z)), \quad z = \varepsilon x.$$

En effet, c'est pour  $s \simeq \varepsilon^{\frac{2}{m-2}}$  que  $s^m \simeq \varepsilon^2 s^2$ . Nous aurons alors, en fonction du signe de  $K$  et suivant la parité de  $m$  (zéro,) une ou deux branches de solutions dans la limite transsonique. On se place dans le cas où  $m$  est impair ou ( $m$  est pair et  $K < 0$ ). L'équation (KdV) généralisée (gKdV) sera alors avec un terme non linéaire

du type  $\Gamma^{(m)}A^{m-2}\partial_z A$  (où  $\Gamma^{(m)}$  est proportionnel à  $K$ ). Des calculs analogues donnent alors une énergie et un moment avec un développement de la forme

$$E(U_{c(\varepsilon)}) = E_0\varepsilon^{\frac{6-m}{m-2}} + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{8-m}{m-2}}) \quad \text{et} \quad P(U_{c(\varepsilon)}) = P_0\varepsilon^{\frac{6-m}{m-2}} + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{8-m}{m-2}}),$$

avec  $E_0 = \mathbf{c}_s P_0$ , et on aura  $E(U_{c(\varepsilon)}) - c(\varepsilon)P(U_{c(\varepsilon)})$  de l'ordre de  $\varepsilon^{\frac{m+2}{m-2}}$  du fait de nombreuses compensations. Dans l'Exemple 4, nous avons choisi un cas très dégénéré pour lequel  $m = 7$ . Ceci était motivé par le fait que cela correspond au plus petit entier  $m$  tel que l'énergie et le moment divergent vers  $+\infty$  dans la limite transsonique, et ce calcul montre que l'on a l'asymptote  $E = \mathbf{c}_s P$ . Ce point est général car il est toujours vrai que  $E(U_{c(\varepsilon)}) - \mathbf{c}_s P(U_{c(\varepsilon)})$  converge vers 0 si  $m \geq 8$  dès que  $m$  est impair ou ( $m$  est pair et  $K < 0$ ).

Pour ce qui concerne la stabilité de l'onde progressive dans la limite transsonique, nous voudrions mentionner les résultats de stabilité associés à l'onde solitaire (disons de vitesse  $\frac{1}{\mathbf{c}_s}$ ) de l'équation (gKdV)

$$\partial_\tau A - \frac{1}{\mathbf{c}_s^2} \partial_z^3 A + \Gamma^{(m)} A^{m-2} \partial_z A = 0,$$

lorsque cette onde solitaire existe, c'est-à-dire lorsque  $m$  est impair ou lorsque  $m$  est pair et  $\Gamma^{(m)} < 0$  (cas défocalisant). On sait que cette onde solitaire est stable pour  $m \leq 5$  (voir [38]) et instable si  $m \geq 6$  (cf. [38] pour  $m \geq 7$  et [133] si  $m = 6$ ). Dans le cas critique  $m = 6$ , on peut avoir explosion dans  $H^1$  en temps fini ou infini pour des données initiales proches de l'onde solitaire (voir [134]). On remarquera que pour  $m \geq 7$  (et  $m \geq 7$  seulement), on a d'une part instabilité de l'onde solitaire dans (gKdV) et d'autre part la (ou les) branche(s) transsonique(s) des ondes de (NLS) divergent en énergie et moment, "donc"  $\frac{dP}{dc} > 0$  et il y aura aussi instabilité pour (NLS). Pour le cas critique  $m = 6$  (et  $\Gamma^{(6)} < 0$ ), il y aura aussi instabilité mais avec cette fois-ci  $E(U_c)$  et  $P(U_c)$  qui convergent vers des limites *finies* lorsque  $c \rightarrow \mathbf{c}_s$ .

## 2.4 Perspectives et travaux en cours

### • Perspectives sur des problèmes sur la stabilité en dimension 1.

★ Afin de prouver la stabilité/instabilité orbitale des ondes progressives en 1d, nous avons à notre disposition essentiellement deux approches. La première est la théorie de type Grillakis-Shatah-Strauss qui repose sur les propriétés spectrales du linéarisé, et qui est donnée dans le théorème 8. L'avantage est qu'elle donne la réponse au problème de stabilité dès que  $0 < c < \mathbf{c}_s$  et  $\frac{dP}{dc} \neq 0$ . L'inconvénient est de laisser de côté le cas  $c = \mathbf{c}_s$ , où la décomposition spectrale de [122] n'est plus valable. La seconde approche est le résultat de T. Cazenave et P.-L. Lions [44], qui prouve la stabilité orbitale des ondes progressives obtenues par minimisation de  $E$  à  $P$  fixé, comme déjà vu à la section 2.1. En particulier, cela ne démontre pas d'instabilité. La difficulté commune aux deux approches est la définition du moment, qui est moins triviale en dimension 1 que pour  $d \geq 2$ , puisque les fonctions avec lesquelles on travaille ont des limites différentes en  $+\infty$  et  $-\infty$  qu'il faut précisément prendre en compte. En effet, la "bonne" définition du moment

$$P(\Psi = Ae^{i\phi}) = \int_{\mathbb{R}} (A^2 - r_0^2) \partial_x \phi \, dx$$

ne vaut que lorsque  $\Psi$  ne s'annule pas. C'est parce que la formulation hydrodynamique n'a plus de sens lorsque  $\Psi$  s'annule que le théorème 8 ne vaut plus pour le "kink" ( $c = 0$ ).

Dans [31], la stabilité orbitale des ondes progressives de (GP), en dimension  $d = 1$ , de vitesses  $0 < c < \mathbf{c}_s$  est démontrée non pas en utilisant le théorème 8 de Z. Lin mais la caractérisation variationnelle par minimisation de l'énergie sous contrainte de moment fixé. Notons que ceci ne marche que parce que l'on sait expliciter les solutions, et plus précisément leur énergie/moment en fonction de la vitesse  $c$ , et que l'on sait à l'avance qu'il y a une bijection complète

$$c \in [0, \mathbf{c}_s] \leftrightarrow P \in ]0, P(\text{kink})] \leftrightarrow E \in ]0, E(\text{kink})]$$

via des fonctions monotones. En particulier, la minimisation de  $E$  à  $P \in (0, P(\text{kink}))$  fixé fournira l'intervalle de vitesses  $(0, \mathbf{c}_s)$  où il ne manque que le "kink". Le point de départ de l'approche de [31] est que toute fonction d'énergie strictement plus petite que celle du "kink" ne s'annule pas, donc a un moment bien défini.

Malgré le fait que cette approche ne prouve que de la stabilité, nous voudrions souligner quelques points concernant des nonlinéarités telles que celles étudiées dans [A8] (sous-section 2.3.1), où le potentiel  $F$  est strictement positif pour  $\varrho \neq r_0^2$  (on a déjà vu que si  $F$  prend des valeurs strictement négatives, la minimisation de  $E$  à  $P$  fixé n'est pas toujours une bonne méthode). Dans l'exemple 1, il existe deux branches de solutions dans la limite transsonique, qui sont toutes les deux stables vu le théorème 8, bien que celle au-dessus ne soit bien sûr pas (globalement) minimisante. Pour l'approche par minimisation sous contrainte, on voit que les ondes de grand moment ont une énergie trop grande pour exclure qu'elles s'annulent, et se pose alors la question de la définition du moment. Ainsi, le problème de minimisation globale de  $E$  à  $P$  fixé et grand n'est même pas bien défini. Un autre angle d'attaque est de travailler avec des minima locaux de  $E$  à  $P$  fixé. Ceci nécessite de définir un ouvert adapté dans l'espace d'énergie, et pour cela, on peut se baser sur l'injection de Sobolev  $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$  pour garantir que les fonctions de cet ouvert ne s'annulent pas, et donc ont un moment bien défini. La difficulté est alors de justifier l'existence de minimiseurs... De ce point de vue, on notera que dans l'exemple 5, ce type de minimisation *ne marchera pas* si les moments correspondants sont entre  $\simeq 3$  (extrémité droite de la branche de gauche) et  $\simeq 4$  (extrémité gauche de la branche de droite). Rappelons que le potentiel  $F$  est strictement positif pour  $\varrho \neq r_0^2$ .

★ Dans le cadre de l'équation de Gross-Pitaevskii en dimension  $d = 1$ , la stabilité orbitale du "kink" (la solution stationnaire non triviale) a été établie dans [32] en usant d'une caractérisation variationnelle. En effet, le "kink" minimise l'énergie avec une contrainte sur le moment, qui est en fait un "moment modulo  $\pi$ " car le "kink" s'annule. L'article [68] établit aussi un résultat de stabilité dans un espace fonctionnel différent en utilisant l'inverse scattering. Il est raisonnable de penser que le cadre proposé dans [32] puisse être adapté à une  $f$  plus générale telle que le potentiel  $F$  soit positif et nul qu'en  $\varrho = 0$ .

Toutefois, il ne faut pas croire que la minimisation sous contrainte donnera systématiquement (même avec un potentiel  $F$  strictement positif pour  $\varrho \neq r_0^2$ ), la plage complète de vitesses  $[0, c_s[$ . A cet égard, on consultera l'article [104] qui travaille avec le modèle (NLS) saturé :

$$f(\varrho) = \frac{\varrho_{\text{sat}}}{2} \left( \frac{1}{(1 + 1/\varrho_{\text{sat}})^2} - \frac{1}{(1 + \varrho/\varrho_{\text{sat}})^2} \right),$$

et où l'on vérifie sans peine que le potentiel  $F$  associé est strictement convexe, avec  $r_0 = 1$  et  $F(1) = F'(1) = 0 < F''(1)$ . Dans [104], une étude est menée pour les deux valeurs  $\varrho_{\text{sat}} = 0.2$  et  $\varrho_{\text{sat}} = 0.08$ . Si, pour  $\varrho_{\text{sat}} = 0.2$ , le diagramme énergie-moment est qualitativement le même que pour (GP), il se trouve que pour  $\varrho_{\text{sat}} = 0.08$ , ce diagramme énergie-moment devient

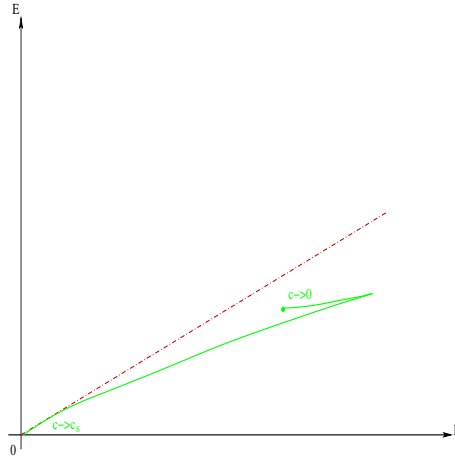


FIGURE 2.17 – Diagramme  $(E, P)$  pour (NLS) saturé avec  $\varrho_{\text{sat}} = 0.08$

c'est-à-dire que la minimisation de  $E$  à  $P$  fixé ne donnera que les ondes stables, *i.e.* celles pour  $c \in ]c_{\text{cusp}}, c_s[$ . Il n'y a plus de bijections  $c \leftrightarrow P \leftrightarrow E$ . Notons que l'apparition d'un point de rebroussement ne se voit pas facilement sur la nonlinéarité  $f$ , puisque pour tout  $\varrho_{\text{sat}} > 0$ , les fonctions  $F$  et  $\mathcal{V}$  sont toujours strictement convexes et décroissantes sur  $[0, 1]$  et  $[-1, 0]$  respectivement, mais il y a un point de rebroussement dès que  $\varrho_{\text{sat}} \geq 0.134$ . Un autre point à mentionner est que, au vu des diagrammes énergie-moment (comme celui de l'exemple 5), il est manifeste que, par opposition à ce que l'on a vu à la section 2.1, la fonction  $\mathbf{p} \mapsto E_{\min}(\mathbf{p})$  n'est pas globalement concave mais que par intervalles.

Au vu des exemples étudiés dans [A<sub>8</sub>], on voit à quel point l’algèbre associée à la nonlinéarité de Gross-Pitaevskii est extrêmement spécifique. Tous les points soulevés ici, et en particulier la question de la définition du moment en dimension 1, montrent à quel point le cas mono-dimensionnel est à part.

★ *Stabilité pour les ondes progressives soniques et stationnaires.* L’inconvénient du théorème 8 est qu’il ne donne pas (pour une onde non triviale) la stabilité ou l’instabilité lorsque  $c = c_s$ . En effet, la décomposition spectrale n’est plus valable dans ce cas. Cependant il doit être possible de montrer, lorsque  $\frac{dP}{dc} < 0$ , la stabilité en justifiant que l’on a un minimiseur de  $E$  à  $P$  fixé.

Dans le cadre de l’équation de Gross-Pitaevskii en dimension  $d = 1$ , la stabilité orbitale du “kink” (la solution stationnaire non triviale) a été établie dans [32] en usant d’une caractérisation variationnelle. En effet, le “kink” minimise l’énergie avec une contrainte sur le moment, qui est en fait un “moment modulo  $2\pi$ ” car le “kink” s’annule. L’article [68] établit aussi un résultat de stabilité dans un espace fonctionnel différent en utilisant l’inverse scattering. Il est raisonnable de penser que le cadre proposé dans [32] puisse être adapté à une  $f$  plus générale telle que le potentiel  $F$  soit positif et nul qu’en  $\varrho = r_0^2$ , en prenant toutefois garde au fait qu’il nous faut savoir que le “kink” est raisonnablement minimisant (afin d’éviter la situation de (NLS) saturé avec  $\varrho_{\text{sat}} = 0.08$  donnée dans la figure ci-dessus). Pour le modèle (NLS) saturé, il se trouve que le “kink” (la solution stationnaire pour  $c = 0$ ) est stable si  $\varrho_{\text{sat}} \leq 0.134$  et instable si  $\varrho_{\text{sat}} \geq 0.134$  : voir [104] (stabilité linéaire et étude numérique) ainsi que [60] (pour une étude du linéarisé via la fonction de Vakhitov-Kolokolov, et un résultat d’instabilité nonlinéaire). La fonction de Vakhitov-Kolokolov est définie par

$$\text{VK}(\lambda) \equiv \int_{\mathbb{R}} \left( [-\partial_x^2 - f(U^2) - \lambda]^{-1} (\partial_x U) \right) (\partial_x U) dx,$$

où  $U$  est le “kink”, pour  $\lambda \in ]\lambda_*, 0[$  pour un  $\lambda_* < 0$ . Cette fonction VK a une limite  $\text{VK}_0$  quand  $\lambda \rightarrow 0^-$ . Si  $\text{VK}_0 > 0$ , alors le linéarisé de (NLS) autour du “kink” a une valeur propre réelle  $> 0$  instable, et il en découle l’instabilité nonlinéaire. Lorsque  $\text{VK}_0 < 0$ , le linéarisé de (NLS) autour du “kink” a un spectre inclus dans  $i\mathbb{R}$ . Noter que cette fonction VK détecte les valeurs propres instables sur le linéarisé de (NLS). La théorie de Grillakis-Shatah-Strauss, si elle était applicable (ce n’est pas le cas car le “kink” s’annule) repose sur le linéarisé de  $\mathcal{F}_c$ . Toutefois, l’article [79] montre que dans le cas  $\frac{dP}{dc} > 0$ , il y a effectivement une valeur propre instable sur le linéarisé de (NLS).

★ *Stabilité aux points de rebroussement.* Le résultat du théorème 8 ne dit rien sur le cas  $\frac{dP}{dc} = 0$ , qui est précisément ce qui arrive au point de rebroussement dans les exemples précédents. Le premier point est de déterminer s’il y a stabilité ou instabilité. On remarquera que sur les diagrammes  $(E, P)$ , les points de rebroussements correspondent à des minimiseurs (locaux) de  $E$  à  $P$  fixé. Ceci est vrai que l’on ait affaire à un rebroussement avec  $E$  et  $P$  localement maximaux ou localement minimaux. Ceci plaide en faveur de leur stabilité au vu de [44]. Ceci est un bon point car il n’est guère clair que la stabilité/instabilité puisse se déduire d’arguments de linéarisation comme le fait la théorie de Grillakis-Shatah-Strauss. C’est pourquoi nous pensons que la bonne approche sera de montrer qu’aux points de rebroussement, nous avons des minimiseurs locaux de  $E$  à  $P$  fixé. Nous cherchons actuellement à donner un cadre adapté pour mettre en évidence ces propriétés de minimisation locale en dimension un, puisque ceci permettra de déterminer la stabilité dans beaucoup des cas laissés ouverts par les résultats précédents.

★ L’étude de la stabilité en dimension supérieure est aussi très intéressante, mais l’emploi des techniques de type Grillakis-Shatah-Strauss requiert une courbe  $P \mapsto E$  régulière, ce dont on ne dispose pas à ce jour (à moins d’avoir un résultat d’unicité du minimiseur...), et des propriétés spectrales. Une piste pourrait être de commencer par la limite transsonique en dimension  $d = 3$ , où l’on sait qu’il y a explosion dans (KP-I).

• **Etude de la limite  $c \rightarrow 0$  lorsque  $\inf F < 0$ .** Lorsque  $\inf F < 0$ , la minimisation sous contrainte de l’énergie  $E$  à moment fixé  $P$  n’est pas adaptée à l’obtention d’onde progressive, car l’infimum en question vaut  $-\infty$ . Cependant, l’approche consistant à minimiser  $I$  avec énergie de Dirichlet fixée est toujours valable. En dimension  $d \geq 3$ , on sait que la vitesse des ondes que l’on obtient via la fonctionnelle  $I$  tend vers 0 lorsque  $k \rightarrow +\infty$ . Il est probable que cela soit aussi le cas si  $d = 2$  et  $\inf F < 0$ , mais nous n’en avons pas la démonstration. Il est alors parfaitement naturel d’envisager la limite  $c \rightarrow 0$  pour ce problème. Il est naturel de se dire que l’on va converger vers le “ground state” de (NLS), mais une démonstration manque. En dimension  $d \geq 4$ , M. Mariş a établi dans [132] l’existence de solutions de petites vitesses proches du ground state.

• **Travail en cours en collaboration avec C. Scheid (voir [47]).** La richesse des comportements qualitatifs obtenus en dimension 1 dans [A<sub>8</sub>] demande bien sûr d'étudier le cas bidimensionnel. Par exemple, on peut attendre lorsque  $\Gamma = 0 > \Gamma'$  une limite transsonique donnée par une équation (KP-I) cubique analogue au soliton de (gKdV) à la sous-section 2.3.2, ce qui serait cohérent avec l'obtention de la dynamique formelle de (KP-I) cubique. En dimension  $d = 2$ , ces solutions sont alors attendues de haute énergie (à cause des échelles), et instables (il n'y a plus d'onde progressive non triviale pour (KP-I) cubique si  $d \geq 3$ ). Dans le travail en cours [47], nous simulons numériquement les ondes 2d. L'approche standard est d'utiliser une méthode de Newton et la continuation par rapport à la vitesse  $c$ . Nous avons préféré une méthode purement variationnelle, basée sur un flot gradient pour des fonctionnelles de type

$$L_\mu(u) \equiv E(u) + \frac{1}{2}(\mu - P(u))^2,$$

qui présente l'avantage de transformer la minimisation sous contrainte en un problème de minimisation sans contrainte. C'est dans l'article [140] que nous avons rencontré pour la première fois ce type de fonctionnelle. Le paramètre  $\mu$  sert de contrôle sur le moment  $P$ , et la vitesse de l'onde est donnée par  $c = \mu - P(u)$ . Ceci permet d'obtenir naturellement des minimiseurs (locaux) de  $E$  à  $P$  fixé. Cependant, dès que  $\frac{dP}{dc} > 0$ , l'onde progressive n'est plus minimiseur local de  $E$  à  $P$  fixé. Nous avons aussi, selon le même schéma, simulé numériquement la minimisation de  $I$  sous contrainte d'énergie de Dirichlet fixé (cf. section 2.1). Les premiers résultats montrent des comportements analogues à ceux de la dimension 1, à savoir : points de rebroussement et multiplicité de branches de solutions.

Nous avons aussi proposé la variante à deux paramètres

$$\mathcal{K}_{\mu,\nu}(u) \equiv \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathbb{R}^2} V(|u|^2) dx - \nu \right]^2 + \frac{1}{2}(\mu - P(u))^2,$$

qui permet de contrôler à la fois le moment *et* l'énergie potentielle. Toutefois, il n'y a moralement qu'un paramètre pour décrire ces ondes : la vitesse  $c$ . Il y a donc une redondance d'information puisque l'on utilise deux paramètres.

Un autre phénomène plus curieux nous est aussi apparu lors de l'étude avec la nonlinéarité de l'exemple 2

$$f(\varrho) = 4(\varrho - 1) + 36(\varrho - 1)^3,$$

où  $\Gamma \neq 0$ . Nous avons obtenu le diagramme énergie-moment partiel suivant :

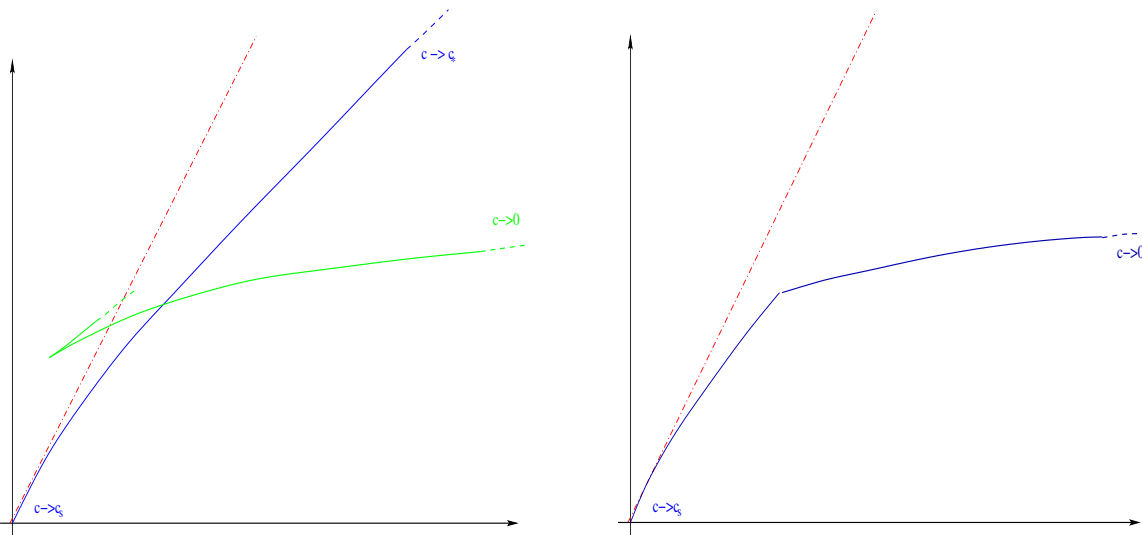


FIGURE 2.18 – (a) Diagramme  $(E, P)$  pour l'exemple 2 en dimension 2; (b) courbe probable  $\mathbf{p} \mapsto E_{\min}(\mathbf{p})$

La vitesse critique  $c_*$  pour la branche supérieure est la même que la vitesse critique trouvée en dimension 1. En effet, on observe le long de la branche supérieure une “convergence vers une onde 1d”. Les calculs numériques pour cet exemple ne sont pas finis, et la ligne verte en pointillés indique la continuation probable de la courbe (il



est fort probable que l'on obtienne là aussi une "convergence vers une onde 1d" pour  $c \rightarrow c_*^-$ ). Les deux branches de solutions se croisent, et il est raisonnable de se dire que lorsque l'on fait la minimisation de  $E$  sous contrainte que  $P$  est fixé, on obtient la courbe (b) de droite, puisqu'on se situe sur l'une des branches pour  $P \geq P_*$ , et sur l'autre branche pour  $P \leq P_*$ , où  $P_*$  est l'abscisse du point de croisement. Le minimiseur "saute" donc d'une branche à l'autre à la valeur  $P = P_*$ , pour laquelle il y a donc *deux* minimiseurs, et la courbe  $P \mapsto E$  n'est alors *pas* dérivable en  $P = P_*$ . Il s'ensuit que très probablement, l'ensemble des vitesses obtenues par minimisation sous contrainte est du type  $]0, c_1] \cup [c_2, c_s[$ , avec  $0 < c_1 < c_2 < c_s$ . Cet exemple souligne qu'un théorème d'unicité du minimiseur de  $E$  à  $P$  fixé ne peut probablement pas être un résultat valable pour une nonlinéarité  $f$  générale. Répétons une fois de plus que  $f$  a les mêmes propriétés qualitatives que la nonlinéarité de (GP)  $f(\varrho) = \varrho - 1$ , à savoir fonction régulière strictement croissante tendant vers  $+\infty$  en  $+\infty$ . Nous avons déjà rencontré à plusieurs endroits les conséquences que pourraient avoir une justification de l'unicité du minimiseur... Toutefois, il est probable que pour (GP), il y ait à la fois unicité du minimiseur et régularité de la courbe  $\mathbf{p} \mapsto E_{\min}(\mathbf{p})$  (sur  $]0, +\infty[$  si  $d = 2$ , et sur  $[\mathbf{p}_0, +\infty[$  si  $d = 3$ ). Mentionnons aussi que nous n'avons pas trouvé dans la littérature de simulations numériques des ondes progressives pour la nonlinéarité cubique-quintique en dimension  $d \geq 2$ . En particulier, on remarquera que les théorème 2 ( $d \geq 3$ ) et théorème 4 ( $d = 2$ ) établissent l'existence d'ondes progressives sans que l'on ait le moindre *a priori* qualitatif sur ces ondes. Notre objectif est de déterminer ces ondes numériquement lorsque  $d = 2$ .

Nous avons l'espoir que la fonctionnelle à deux paramètres  $\mathcal{K}_{\mu,\nu}$  pourrait permettre d'aborder l'existence de la (ou des) branche(s) transsonique(s) en dimension  $d = 2$ . En effet, numériquement, il nous était apparu qu'au moins l'une des deux branches était localement minimisante pour  $\mathcal{K}_{\mu,\nu}$ . Malheureusement, il semble difficile de montrer qu'elle est globalement minimisante pour  $\mathcal{K}_{\mu,\nu}$ . Une perspective de travail est donc de trouver une méthode robuste pour aborder la (ou les) branche(s) transsonique(s) en dimension  $d = 2$  lorsque  $\Gamma = 0$ .

• **Modèles d'équations de Schrödinger couplées.** Un modèle intéressant est celui de deux équations de Schrödinger couplées, de type

$$\begin{cases} i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Delta \Psi = \frac{1}{\varepsilon^2} \left( |\Psi|^2 - 1 + \frac{1}{\varepsilon^2} |\Phi|^2 \right) \Psi \\ i \delta \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Delta \Phi = \frac{1}{\varepsilon^2} \left( q^2 |\Psi|^2 - \varepsilon^2 k^2 \right) \Phi, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} i \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \Delta \Psi_1 = \left( |\Psi_1|^2 - 1 + \alpha |\Psi_2|^2 \right) \Psi_1 \\ i \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + \Delta \Psi_2 = \left( |\Psi_2|^2 + \alpha |\Psi_1|^2 - 1 + \Lambda^2 \right) \Psi_2. \end{cases}$$

Le premier est un modèle où  $\Psi$  représente le condensat et  $\Phi$  une impureté (voir [71]), et où la condition à l'infini est donc

$$|\Psi| \rightarrow 1 \quad \text{ou} \quad \Psi \rightarrow 1, \quad \text{et} \quad \Phi \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow +\infty.$$

Le second est un modèle (où certaines masses et longueurs ont été prises égales pour simplifier) pour l'interaction de deux condensats, représentés par les deux fonctions d'onde  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  (cf. [23], [22]). Dans ce cas, la condition à l'infini est

$$(\Psi_1, \Psi_2) \rightarrow (\Psi_1^\infty, \Psi_2^\infty), \quad |x| \rightarrow +\infty.$$

Le premier a été relativement peu étudié : M Mariş dans [131] établit l'existence d'ondes progressives pour les vitesses subsoniques en dimension  $d = 1$ , et O. Bouchel [39] étudie la décroissance à l'infini en dimension  $d$  quelconque (en adaptant les travaux de P. Gravejat [74]). L'énergie et le moment s'écrivent alors

$$E(\Psi, \Phi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon^2 |\nabla \Psi|^2 + \frac{1}{q^2} |\nabla \Phi|^2 + \frac{1}{2} (1 - |\Psi|^2)^2 + \frac{|\Psi|^2 |\Phi|^2}{\varepsilon^2} - \frac{k^2}{q^2} |\Phi|^2 dx$$

et

$$\vec{\mathcal{P}} = \int_{\mathbb{R}^d} \langle i(\Psi - 1), \nabla \Psi \rangle + \frac{\delta q^2}{\varepsilon^2} \langle i\Phi, \nabla \Phi \rangle dx,$$

et l'on a aussi conservation de

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\Phi|^2 dx.$$

Pour le second modèle, énergie et moment sont donnés par

$$E(\Psi_1, \Psi_2) = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \Psi_1|^2 + |\nabla \Psi_2|^2 + \frac{1}{2}(|\Psi_1^\infty|^2 - |\Psi_1|^2)^2 + \frac{1}{2}(|\Psi_2^\infty|^2 - |\Psi_2|^2)^2 + \alpha(|\Psi_1|^2 - |\Psi_1^\infty|^2)(|\Psi_2|^2 - |\Psi_2^\infty|^2) dx$$

et

$$\vec{P} = \int_{\mathbb{R}^d} \langle i(\Psi_1 - \Psi_1^\infty), \nabla \Psi_1 \rangle + \langle i(\Psi_2 - \Psi_2^\infty), \nabla \Psi_2 \rangle dx.$$

A notre connaissance, il n'existe pas de résultat mathématique pour ce second modèle. L'article [23] étudie numériquement les ondes progressives pour ce système d'équations en dimension 3 (et donne des références pour le 1d). La difficulté pour l'étude de ces modèles est qu'à chaque fois, le "potentiel" peut prendre des valeurs négatives. Ceci fait que les techniques variationnelles usuelles de type minimisation de l'énergie à moment fixé ne marchent plus. Une façon de tester la robustesse des techniques de M. Mariş (théorème 2,  $d \geq 3$ ) et de notre théorème 4 pour  $d \geq 2$  sera de les appliquer à ces nouveaux modèles. En effet, ces deux résultats ne font pas d'hypothèse sur le signe du potentiel.

### • Vers des résultats de multiplicité ?

En dimension  $d = 1$ , dans  $[\mathcal{A}_8]$ , nous déterminons *toutes* les ondes progressives non triviales, puisque l'on se ramène à une équation de Newton simple. En dimensions  $d = 2$  et  $d = 3$ , il n'est pas certain que les diagrammes énergie-moment comme ceux de C. Jones et P. Roberts de la figure 2.1 donnent toutes les solutions.

★ Au chapitre 1, nous avons vu le régime (KP-I) à partir de (NLS). Pour les ondes progressives, nous avons aussi vu que lorsque  $\Gamma \neq 0$ , les solutions en onde progressive ayant certaines propriétés minimisantes convergeaient vers un "ground state" de (KP-I) (le "lump"?). En dimension 2 (et  $\Gamma \neq 0$ ), l'équation (KP-I) est intégrable, et D. Pelinovsky et Y. Stepanyants dans [141] ont déterminé d'autres solutions en onde solitaire explicites (on notera qu'en dimension 1, (KdV) n'a qu'"une" seule onde progressive, le soliton). Celles-ci sont, tout comme le "lump" [127], des fractions rationnelles, mais numérateurs et dénominateurs sont de degrés plus élevés. Il se trouve que ces solutions correspondent graphiquement à la juxtaposition de deux, trois, quatre... "lumps" situés à une certaine distance les uns des autres. Ces solutions ne sont pas des "ground states". Il serait intéressant de regarder s'il existe des ondes progressives de (NLS) qui ressemblent asymptotiquement à ces ondes solitaires. Cela voudrait dire qu'il existerait d'autres branches que celle donnée figure 2.1. Bien sûr, des techniques variationnelles doivent être développées pour avoir des caractérisations adaptées de ces ondes solitaires, en premier lieu sur (KP-I), puis sur (NLS). Ceci permettrait d'avoir une structure stable, valable aussi en dimension  $d = 3$ , où les formules explicites ne sont plus valables.

★ Nous avons déjà mentionné au chapitre 1 comment obtenir formellement l'équation (KdV)/(KP-I) cubique lorsque  $\Gamma = 0$ , et plus généralement (gKdV)/(gKP-I), à partir de (NLS). A la sous-section 2.3, nous avons aussi justifié la convergence des ondes progressives 1d de (NLS) vers l'onde solitaire de (KdV) cubique lorsque  $\Gamma = 0 < \Gamma'$ , justifiant un résultat de multiplicité dans la limite transsonique. Il est par conséquent très naturel de penser que pour les nonlinéarités que nous avons envisagées dans  $[\mathcal{A}_8]$  et que nous étudions numériquement dans [47], nous pouvons avoir convergence en dimension  $d = 2$  dans la limite transsonique vers des ondes solitaires de l'équation (KP-I) cubique focalisante

$$\frac{1}{c_s^2} \partial_{z_1} A + \Gamma' A^2 \partial_{z_1} A - \frac{1}{c_s^3} \partial_{z_1}^3 A + \partial_{z_2}^2 \partial_{z_1}^{-1} A = 0.$$

Ceci est effectivement confirmé par nos premiers résultats numériques. On mentionne que le travail de A. de Bouard et J.-C. Saut [55] montre que l'équation (KP-I) cubique n'a pas d'onde solitaire non triviale si  $d \geq 3$  ou si  $\Gamma' > 0$ . Comme déjà vu, l'équation pour les ondes solitaires est impaire en  $A$ , donc nous avons des paires d'ondes solitaires  $(A, -A)$ . Ceci suggère fortement qu'il existe *deux* branches d'ondes progressives pour (NLS) dans la limite transsonique, et ceci est corroboré par notre étude [47]. De façon assez curieuse, dans [140], c'est effectivement une limite transsonique donnée par (KP-I) cubique qui est formellement obtenue, mais le fait que l'équation est impaire en  $A$  ne semble pas avoir été remarqué : les auteurs donnent une seule branche transsonique alors qu'il en existe, par analogie avec nos premiers résultats numériques, très probablement une autre.

Une perspective à moyen terme est de justifier ce comportement asymptotique des ondes de (NLS) vers les "ground states" de (KP-I) cubique focalisant, et, si possible, les résultats de multiplicité qui y sont associés.

Une première étape sera d'avoir une bonne caractérisation variationnelle des ondes progressives de (NLS) dans cette asymptotique. Deuxièmement, il nous faudra trouver une bonne caractérisation variationnelle des "ground states" de (KP-I) cubique défocalisant. Enfin, pour prouver les bornes Sobolev uniformes sur  $A_\varepsilon$  et  $\phi_\varepsilon$ , nous espérons que l'approche consistant à découper en espace de Fourier comme pour la limite transsonique (en dimension 3, disons) sera la bonne.

★ L'équation (NLS) en dimension  $d = 2$  possède des solutions vortex du type (en polaires)

$$a(r)e^{in\theta},$$

pour un  $n \in \mathbb{Z}$  non nul, où  $a$  est solution d'une équation différentielle (nous en avons déjà parlé). Dans l'article [138], Y. Ovchinnikov et I. Sigal ont conjecturé l'existence de solutions de (GP) ayant un degré non nul à l'infini (c'est-à-dire  $\simeq e^{in\theta}$  quand  $|x| \rightarrow +\infty$ ) mais n'étant pas à symétrie radiale, *i.e.* pas du type  $a(r)e^{in\theta}$ . Leur solution ressemblerait à plusieurs vortex disposés sur un polygone régulier et son centre. Même pour  $n = 2$ , une telle solution à symétrie brisée pourrait exister, et nous n'avons pas de résultat sur ce sujet. Une perspective à moyen terme est d'étudier ces solutions stationnaires.

★ Par ailleurs, il n'est pas exclu que dans la limite  $c \rightarrow 0$  où l'onde progressive a des vortex, il existe des ondes avec une autre structure que la structure minimisante formée de deux vortex  $(+1, -1)$ . Par exemple, on peut imaginer deux vortex  $(+2, -2)$ , ou une configuration à quatre vortex  $(+1, +1, -1, -1)$ , ou bien des structures plus compliquées. Il est connu que les configurations en question doivent être critiques pour l'énergie de Kirchhoff régissant l'interaction entre ces vortex, donc une première étape est bien sûr de déterminer ces configurations critiques. Il est facile de voir que dans le cas  $(+2, -2)$ , on peut trouver une localisation critique analogue au cas  $(+1, -1)$ . Plus curieusement, la résolution du système d'équations obtenues par ce caractère critique pour les petites valeurs des degrés et nombre de vortex semblent indiquer que les seules configurations critiques sont celles du type  $(+m, -m)$ , avec  $m \geq 1$ , et qu'il n'existe pas de configurations critiques avec trois ou quatre vortex.

★ Pour la nonlinéarité cubique-quintique, il existe une solution stationnaire appelée "ground state", qui est une fonction  $U_0$  réelle et radiale croissant de  $U_0(0) \in (0, r_0)$  à  $r_0$ , et qui est instable (voir A. de Bouard [54]). En fait, d'autres solutions radiales existent dans ce cas : voir [21] pour  $d \geq 3$ , [20] si  $d = 2$ , ainsi que [78] par exemple. Une piste de travail serait de déterminer, dans l'esprit du travail [132], si ces solutions appartiennent à des branches continues (en vitesse) d'ondes progressives pour (NLS) cubique-quintique.

● **Instabilité transverse.** F. Rousset et N. Tzvetkov ont développé une théorie générale dans le but de traiter l'instabilité transverse des ondes progressives mono-dimensionnelles (voir, *e.g.*, [146]). L'approche est purement e.d.p.iste et n'utilise pas d'argument de scattering inverse, par exemple. Dans [147], ils montrent l'instabilité transverse des ondes 1d pour le modèle de Gross-Pitaevskii, ce qui était formellement donné dans [113]. La démonstration repose sur les propriétés spectrales du linéarisé, et sont donc plus difficiles à vérifier en dimension plus grande. Cependant, la question de l'instabilité transverse (comme suggérée dans [112]) des ondes bi-dimensionnelles est très naturelle. On notera que ces ondes 2d n'ont pas une décroissance exponentielle mais seulement algébrique.



# Chapitre 3

## Interaction de trains d'ondes

L'article associé à ce chapitre est :

[A<sub>5</sub>] D. CHIRON,

Semigroup estimates and stability/instability results for the linearized three waves interaction equations.

A paraître dans *Rev. Mat. Complut.* (2011).

\*\*\*\*\*

Un train d'onde est une modulation lente d'une oscillation de la forme

$$A(\varepsilon x) \exp(ik \cdot x) + c.c.,$$

où "c.c." désigne le complexe conjugué, où  $A$  est suffisamment régulière et localisée en espace, et  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Ceci donne, dans l'espace de Fourier

$$\frac{1}{\varepsilon^d} \hat{A}\left(\frac{\xi - k}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon^d} \overline{\hat{A}\left(\frac{\xi + k}{\varepsilon}\right)},$$

*i.e.* un pic d'épaisseur  $\varepsilon$  aux fréquences  $\pm k$ .

### 3.1 Le système d'interaction à trois ondes

Dans cette partie, on se consacre à l'étude du système d'interaction à trois ondes en dimension  $d$

$$\begin{cases} \partial_t A_1 + v_1 \cdot \nabla A_1 + i\sigma_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 = 0 \\ \partial_t A_2 + v_2 \cdot \nabla A_2 + i\sigma_2 \bar{A}_3 \bar{A}_1 = 0 \\ \partial_t A_3 + v_3 \cdot \nabla A_3 + i\sigma_3 \bar{A}_1 \bar{A}_2 = 0. \end{cases} \quad (\text{TWI})$$

Les amplitudes  $A_\ell$  sont complexes, les vitesses  $v_\ell$  sont des vecteurs donnés de  $\mathbb{R}^d$ , et les constantes de couplage  $\sigma_\ell$  sont réelles pour notre étude. Il est possible de travailler dans un domaine avec des conditions au bord périodiques dans une ou plusieurs directions, mais dans ce chapitre, on se limitera pour simplifier au cas où (TWI) est posé dans l'espace entier.

Le système (TWI) apparaît dans des domaines divers de la physique : physique des plasmas, mécanique des fluides, optique, acoustique, oscillations mécaniques ou électriques... On renvoie au livre de A. Craik [53] et à l'article [98] de D. Kaup, B. Riemann et A. Bers. La manière usuelle pour obtenir le système (TWI) est comme suit. On considère une équation d'onde en variables  $(t, x)$  scalaire (pour simplifier) avec nonlinéarité quadratique

$$\partial_t u + \mathcal{Q}u + \mathcal{R}(u^2) = 0 \quad (3.1)$$

(on peut penser à (KdV), (KP)... mais cela vaut aussi pour des systèmes). Les opérateurs  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{R}$  sont pseudo-différentiels de symbole  $iQ = iQ(k) \in i\mathbb{R}$  et  $iR = iR(k) \in i\mathbb{R}$  respectivement, et la relation de dispersion linéaire est alors  $\omega = Q(k)$ . Supposons que des vecteurs d'onde  $(k_1, k_2, k_3)$  forment une triade résonante, *i.e.*

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0, \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0, \quad \text{avec} \quad \omega_\ell \equiv Q(k_\ell), \quad \ell = 1, 2, 3,$$

et cherchons une solution  $u = u(t, x)$  de l'équation d'onde (3.1) qui soit la somme de trois paquets d'onde de petite amplitude associés à cette triade  $(k_1, k_2, k_3)$ . Plus précisément, on suppose que  $u$  a un développement de la forme

$$u(t, x) = \varepsilon \sum_{\ell=1}^3 A_\ell(t, x) e^{i(k_\ell \cdot x - \omega_\ell t)} + c.c. + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad t = \varepsilon t, \quad x = \varepsilon x.$$

Il faut remarquer que la longueur caractéristique de modulation est du même ordre que l'amplitude caractéristique des paquets. On insère ce développement multi-échelle dans (3.1). On remplace donc  $\partial_t$  par  $\partial_t + \varepsilon \partial_t$  et on fait un développement de Taylor de  $R$  et  $Q$  autour du vecteur d'onde  $k$  qui nous intéresse. Ceci donne

$$\begin{aligned} 0 = & \mathcal{O}(\varepsilon^2) + \varepsilon \sum_{\ell=1}^3 \left( -i\omega_\ell A_\ell(t, x) + \varepsilon \partial_t A_\ell(t, x) \right) e^{i(k_\ell \cdot x - \omega_\ell t)} + c.c. \\ & + i\varepsilon \sum_{\ell=1}^3 \left( Q(k_\ell) A_\ell(t, x) - i\varepsilon \nabla_k Q(k_\ell) \cdot \nabla_x A_\ell(t, x) \right) e^{i(k_\ell \cdot x - \omega_\ell t)} + c.c. \\ & + \varepsilon^2 \mathcal{R} \left[ \sum_{\ell', \ell''=1}^3 \left( A_{\ell'}(t, x) A_{\ell''}(t, x) e^{i((k_{\ell'} + k_{\ell'')) \cdot x - (\omega_{\ell'} + \omega_{\ell''})t)} + A_{\ell'}(t, x) \bar{A}_{\ell''}(t, x) e^{i((k_{\ell'} - k_{\ell''}) \cdot x - (\omega_{\ell'} - \omega_{\ell''})t)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \bar{A}_{\ell'}(t, x) A_{\ell''}(t, x) e^{i((-k_{\ell'} + k_{\ell''}) \cdot x - (-\omega_{\ell'} + \omega_{\ell''})t)} + \bar{A}_{\ell'}(t, x) \bar{A}_{\ell''}(t, x) e^{i((-k_{\ell'} - k_{\ell''}) \cdot x - (-\omega_{\ell'} - \omega_{\ell''})t)} \right) \right]. \end{aligned}$$

A ce stade, notons que les termes en  $\varepsilon$  disparaissent au vu de la relation de dispersion  $\omega = Q(k)$ . En outre, pour les termes provenant de la nonlinéarité, on a par exemple

$$\begin{aligned} & \mathcal{R} \left[ \bar{A}_{\ell'}(t, x) \bar{A}_{\ell''}(t, x) e^{i((-k_{\ell'} - k_{\ell''}) \cdot x - (-\omega_{\ell'} - \omega_{\ell''})t)} \right] \\ & = iR(-k_{\ell'} - k_{\ell''}) \bar{A}_{\ell'}(t, x) \bar{A}_{\ell''}(t, x) e^{i((-k_{\ell'} - k_{\ell''}) \cdot x - (-\omega_{\ell'} - \omega_{\ell''})t)} + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Si l'on veut annuler les termes en  $\varepsilon^2$  associés au facteur  $e^{i(k_\ell \cdot x - \omega_\ell t)}$ , remarquons tout d'abord que cela requiert de développer  $u$  un cran plus loin, comme par exemple

$$u(t, x) = \varepsilon \sum_{\ell=1}^3 A_\ell(t, x) e^{i(k_\ell \cdot x - \omega_\ell t)} + c.c. + \varepsilon^2 \sum_{\ell=1}^3 A_{\ell,2}(t, x) e^{i(k_\ell \cdot x - \omega_\ell t)} + c.c. + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad t = \varepsilon t, \quad x = \varepsilon x.$$

Etant donné que l'on a une triade résonante,  $k_1 = -k_2 - k_3$  et  $\omega_1 = -\omega_2 - \omega_3$ . Par suite, l'annulation des termes en  $\varepsilon^2 e^{i(k_1 \cdot x - \omega_1 t)}$  donne

$$\left\{ \partial_t A_1 + \nabla_k Q(k_1) \cdot \nabla_x A_1 + iR(-k_2 - k_3) \bar{A}_2 \bar{A}_3 \right\} = 0.$$

On a supposé ici les vecteurs d'onde  $k_1, k_2, k_3$  non nuls, de sorte que l'on ne peut pas avoir de relation du type  $k_1 = k_2 - k_3$  ou  $k_1 = k_2 + k_3$ . L'équation ci-dessus est la première de (TWI) avec

$$\sigma_\ell \equiv R(k_\ell) \quad \text{et} \quad v_\ell = \nabla_k Q(k_\ell)$$

la vitesse de groupe associée. Les deux autres équations se déduisent de manière analogue.

Pour le système (TWI), les relations de Manley-Rowe fournissent des intégrales du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \sigma_3 |A_2|^2 - \sigma_2 |A_3|^2 dx = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \sigma_1 |A_3|^2 - \sigma_3 |A_1|^2 dx = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \sigma_2 |A_1|^2 - \sigma_1 |A_2|^2 dx = 0. \quad (3.2)$$

En fait, on peut trouver une paire de Lax pour le système (TWI) (*cf.* [161] quand  $d = 1$ , [158] si  $d = 2$  et [162] pour  $d = 3$ ), ce qui en fait un système complètement intégrable pour lequel on peut faire du scattering inverse.

Par conséquent, il existe une infinité de quantités (formellement) conservées (voir [2], [97]). On peut remarquer cependant qu'elles ne donnent pas des bornes  $H^s$  uniformes en temps comme c'est le cas pour (KdV) par exemple. En outre, l'intégrabilité permet de calculer des solitons explicites, et d'exhiber des solutions explicites d'explosion en temps fini (sous certaines conditions sur les paramètres, cf. [161]).

Le scattering inverse vaut pour des données suffisamment régulières et suffisamment décroissantes à l'infini, bien que dans la littérature physique, l'on prenne des données initiales égales à des fonctions caractéristiques. Pour des résultats rigoureux par scattering inverse, on renvoie à [14] (pour des données "génériques" dans la classe de Schwartz) et à [165]. L'usage du scattering inverse présente deux inconvénients. Le premier est de déterminer précisément dans quel espace fonctionnel on travaille (voir cependant [166]), étant précisé que les propriétés de décroissance nécessitent de travailler souvent dans des espaces à poids. Le second est qu'il est difficile, en général, de pouvoir exploiter ces résultats pour un problème plus complexe où le système (TWI) apparaît comme système limite ou intermédiaire, et pour lequel un cadre Sobolev est plus agréable. L'objectif de notre article [A5] est de travailler avec des normes de type  $L^p$  standard, et sans utiliser les techniques de scattering inverse.

Lorsque l'on travaille sur  $\mathbb{R}^d$  tout entier, il est aisé de montrer que le problème de Cauchy est localement bien posé dans les espaces de Sobolev standard et avec poids ( $s \in \mathbb{N}$ ,  $s > d/2$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ )

$$W_m^{s,p}(\mathbb{R}^d) \equiv \left\{ f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^d), (1 + |x|^2)^{m/2} f \in L^p(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

En particulier, cela est aussi vrai dans l'espace de Schwartz.

### 3.1.1 Résultats de stabilité/instabilité par scattering inverse pour le problème linéarisé

On regarde maintenant le problème linéarisé lorsque  $A_1$  et  $A_2$  sont petits comparés à  $A_3$ , c'est-à-dire

$$\begin{cases} \partial_t A_1 + v_1 \cdot \nabla A_1 + i\sigma_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 = 0 \\ \partial_t A_2 + v_2 \cdot \nabla A_2 + i\sigma_2 \bar{A}_3 \bar{A}_1 = 0 \\ \partial_t A_3 + v_3 \cdot \nabla A_3 = 0. \end{cases}$$

Il est alors naturel de travailler dans le repère se déplaçant à vitesse  $v_3$ , et (pour simplifier les notations) de remplacer  $A_2$  par  $\bar{A}_2$  et  $i\bar{A}_3$  par  $A_3$ , ce qui donne

$$\begin{cases} \partial_t A_1 + v_1 \cdot \nabla A_1 + \sigma_1 A_3 A_2 = 0 \\ \partial_t A_2 + v_2 \cdot \nabla A_2 + \sigma_2 \bar{A}_3 A_1 = 0, \end{cases} \quad v_1 \equiv v_1 - v_3, \quad v_2 \equiv v_2 - v_3, \quad (3.3)$$

où désormais  $A_3 = A_3(x)$  est une fonction donnée indépendante du temps, appelée la "pump-wave", et (3.3) est alors appelé la "pump-wave approximation". On s'intéresse aux propriétés de stabilité de la solution  $A_1 = A_2 = 0$  de (3.3). On peut envisager de linéariser autour du soliton (pour  $t \rightarrow -\infty$ ), ce qui donne une "pump-wave" (pour une constante  $\eta \in \mathbb{R}_*$ )

$$A_3(x) = \frac{2\eta}{\cosh(\eta x)}.$$

Ce problème a une interprétation physique très naturelle. L'idée est que l'on a une triade résonante, et l'on excite le système avec un train d'onde (l'onde pompe) ayant une fréquence dans cette triade résonante. On cherche à déterminer si les modes résonants, absents initialement, vont croître (instabilité) ou rester petits (stabilité).

Le système (3.3) est donc un système d'équations de transport faisant intervenir les deux vitesses  $v_1$  et  $v_2$ , couplées via l'onde pompe qui elle, est stationnaire. Pour le système (3.3), l'identité de Manley-Rowe (3.2) devient

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \sigma_2 |A_1|^2 - \sigma_1 |A_2|^2 dx = 0. \quad (3.4)$$

Ceci suggère que la solution  $(A_1, A_2) = (0, 0)$  est stable dans (3.3) lorsque  $\sigma_1 \sigma_2 < 0$ , ce qui est effectivement ce que l'on attend des résultats de scattering inverse (cf. [53], [98]). Notons que le problème de scattering inverse pour le système linéarisé (3.3) s'écrit

$$\begin{cases} i\lambda \psi_1 + v_1 \cdot \nabla \psi_1 + \sigma_1 \psi_2 A_3 = 0 \\ i\lambda \psi_2 + v_2 \cdot \nabla \psi_2 + \sigma_2 \psi_1 \bar{A}_3 = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

et est donc exactement celui obtenu en passant en Fourier en temps,  $\lambda$  faisant office de variable duale (attendu réel, donc). On ne considèrera que des vecteurs propres bornés en espace. Du point de vue du scattering inverse, la stabilité (en temps positif) pour (3.3) signifie que (3.5) n'a pas de solution non triviale pour  $\text{Im}(\lambda) < 0$  et instabilité (en temps positif) que (3.5) possède au moins une solution non triviale avec  $\text{Im}(\lambda) < 0$ .

Le cas  $\sigma_1\sigma_2 > 0$  est beaucoup plus délicat. Au moins en dimension  $d = 1$  sur  $\mathbb{R}$ , il est attendu (voir [98], [53]) que quand

$$v_1 v_2 < 0,$$

*i.e.* si, parmi les vitesses  $v_1, v_2, v_3$  d'origine,  $A_3$  est associé à la vitesse du milieu, lorsque l'on prend pour  $A_3$  le soliton de (TWI), il y a instabilité dans (3.3), ce qui se traduit dans le problème (TWI) à la création de deux solitons, l'un dans  $A_1$ , et l'autre dans  $A_2$ . Ces deux solitons ont des vitesses respectives  $v_1$  et  $v_2$ , c'est-à-dire que l'un se propage vers la gauche, et l'autre vers la droite, alors que le soliton  $A_3$  disparaît (c'est ce que l'on appelle l'instabilité par décroissance). Ce résultat de transfert de solitons est classique (*cf.* [98], [53]), et s'observe dans des expériences et des simulations numériques (voir [13]). Plus généralement, l'instabilité par décroissance se manifeste dès que  $A_3$  n'est pas trop petit pour pouvoir générer les deux solitons. Les quantités

$$\sqrt{\frac{\sigma_1\sigma_2}{|v_1v_2|}} \times \left| \int_{\mathbb{R}} A_3 dx \right| \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{\sigma_1\sigma_2}{|v_1v_2|}} \int_{\mathbb{R}} |A_3| dx$$

sont appelées l'*aire* et l'*aire absolue*. Elles sont proportionnelles à un majorant du nombre de solitons que peut générer  $A_3$  en partant de  $(A_1 \approx 0, A_2 \approx 0, A_3)$  dans (TWI). On notera en effet qu'une fonction du type  $2\eta/\cosh(\eta x)$  a une aire indépendante de  $\eta$ . Par conséquent, une hypothèse de petitesse

$$\sqrt{\frac{\sigma_1\sigma_2}{|v_1v_2|}} \int_{\mathbb{R}} |A_3| dx < c, \quad (3.6)$$

avec  $c$  une constante à déterminer, empêche la formation de solitons. Dans les travaux [53] et [98], on peut trouver diverses valeurs de  $c$  (optimales ou suffisantes), dépendant du régime d'étude, mais toujours sur  $\mathbb{R}$ , avec bien sûr  $\sigma_1\sigma_2 > 0$  et  $v_1v_2 < 0$ . Par exemple,  $c = \pi/2$  est nécessaire et suffisant lorsque  $A_3$  est réel et ne s'annule jamais, dans l'approximation WKB, *i.e.*  $A_3$  est à variation lente. Dans le cas général,  $c \simeq 0.903$  est suffisant.

Lorsque

$$v_1 v_2 > 0,$$

ce phénomène ne peut avoir lieu : on ne peut pas générer des solitons dans  $A_1$  ou  $A_2$ . On notera que maintenant, les deux vitesses  $v_1$  et  $v_2$  sont orientées dans la même direction. Cependant, la question de la stabilité dans (3.3) quand  $v_1v_2 > 0$  n'est alors pas très claire. En effet, l'absence de solitons signifie juste (pour le scattering inverse) que (3.3) n'a pas de valeur propre dans le demi-espace  $\{\text{Im} < 0\}$ . Insistons une fois encore sur le fait que ces résultats ne valent que pour des données très localisées en espace (par exemple, la condition (3.6) demande naturellement  $A_3 \in L^1(\mathbb{R})$ ). Mentionnons à ce sujet que pour des équations d'onde comme (3.1) comme (KdV), des contraintes d'intégrabilité peuvent être imposées pour que  $u$  ait une masse  $\int_{\mathbb{R}} u dx$  (qui est souvent une quantité formellement conservée) finie.

Pour terminer, mentionnons que le cas bi-dimensionnel est nettement moins documenté (pour la partie stabilité) dans la littérature.

### 3.1.2 Résultats de stabilité/instabilité dans des espaces de Sobolev pour le problème linéarisé

On note  $(\Sigma_t)_{t \geq 0}$  le semi-groupe associé au problème (3.3). On détaille ici les résultats obtenus dans  $[\mathcal{A}_8]$ , où la difficulté était de trouver les normes adaptées ( $L^2, L^p, L^\infty, \mathcal{C}_b, \dots$ ). On insistera aussi sur le fait qu'*a priori*, les amplitudes  $A_1, A_2$  et  $A_3$  sont complexes.

**Le cas stable  $\sigma_1\sigma_2 < 0$ .** Ici, la relation de Manley-Rowe (3.4) suggère de travailler avec la norme hilbertienne

$$\int_{\mathbb{R}^d} |A_1|^2 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} |A_2|^2 dx,$$

et l'on obtient immédiatement :



**Proposition 1.** *On suppose  $\sigma_1\sigma_2 < 0$  et on fixe  $s \in \mathbb{N}$ . Si  $A_3 \in W^{s,\infty}(\mathbb{R}^d)$ , alors il existe  $C > 0$ , dépendant de  $A_3, s, \sigma_1, \sigma_2$  (mais pas de  $v_1$  ou  $v_2$ ) tel que, pour  $t \geq 0$ ,*

$$\|\Sigma_t\|_{\mathcal{L}_c(H^s(\mathbb{R}^d))} \leq C(1+t^s).$$

La croissance polynômiale (symptôme d'oscillations en temps) ne peut être supprimée en général (dans le cas  $v_1 = v_2 = 0$  ou en dimension 3 avec des conditions périodiques, voir [A<sub>5</sub>]). Toutefois, en dimension  $d = 1$ , dès que  $v_1$  et  $v_2$  ne sont pas nuls, elle peut être enlevée (cf. [A<sub>5</sub>]). Il s'ensuit que, comme attendu dans le cas  $\sigma_1\sigma_2 < 0$ , le problème de scattering (3.5) n'a pas de valeur propre dans  $\{\text{Im} < 0\}$  pour un vecteur propre  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Noter qu'ici, on peut travailler avec une norme  $L^2$  ou plus généralement avec les Hilbert  $H^s$ .

**Le cas de données petites et localisées.** On considère ici des données petites et très localisées en espace, avec une hypothèse de petitesse dans l'esprit de (3.6), où l'on attend de la stabilité pour (3.3). Le résultat qui suit n'est pas restreint au cas instable  $\sigma_1\sigma_2 > 0$ . La forme de Duhamel pour (3.3) est

$$\begin{cases} A_1(t, x) = A_1^{\text{in}}(x - tv_1) - \sigma_1 \int_0^t A_2(\tau, x - (t-\tau)v_1) A_3(x - (t-\tau)v_1) d\tau \\ A_2(t, x) = A_2^{\text{in}}(x - tv_2) - \sigma_2 \int_0^t A_1(\tau, x - (t-\tau)v_2) \bar{A}_3(x - (t-\tau)v_2) d\tau. \end{cases} \quad (3.7)$$

**Proposition 2.** *On travaille sur  $\mathbb{R}^d$  et on suppose  $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$ . On fixe  $s \in \mathbb{N}$  et on suppose  $A_3 \in \mathcal{C}_b^s(\mathbb{R}^d)$  tel que*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad |\alpha| \leq s, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left\{ \int_{x+\mathbb{R}v_1} |\partial_x^\alpha A_3| + \int_{x+\mathbb{R}v_2} |\partial_x^\alpha A_3| \right\} < \infty$$

et vérifiant l'hypothèse de petitesse

$$\frac{|\sigma_1\sigma_2|}{|v_1| \cdot |v_2|} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{x+\mathbb{R}v_1} |A_3| \right) \left( \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{x+\mathbb{R}v_2} |A_3| \right) < 1. \quad (3.8)$$

Alors, il existe une constante  $C$  dépendant uniquement de  $s, \sigma_1, \sigma_2, v_1, v_2, A_3$  et de (3.8) telle que, pour  $t \geq 0$ ,

$$\|\Sigma_t\|_{\mathcal{L}_c(W^{s,\infty}(\mathbb{R}^d))} \leq C.$$

En dimension  $d = 1$ , avec  $\sigma_1\sigma_2 > 0$  et  $v_1v_2 < 0$ , notre hypothèse de petitesse (3.8) s'écrit

$$\sqrt{\frac{\sigma_1\sigma_2}{|v_1v_2|}} \int_{\mathbb{R}} |A_3| dx < 1,$$

qui est bien une borne supérieure de type (3.6) mais avec  $c = 1$ , ce qui est mieux que la valeur suffisante (dans le cas général)  $c \simeq 0.903$ , mais moins bon que la valeur "exacte"  $c = \pi/2$  dans l'approximation WKB. Là encore, il n'y a donc pas de valeur propre pour (3.5) dans  $\{\text{Im} < 0\}$  si  $A_3$  est localisé et suffisamment petit. On remarquera que dans le cas de la proposition 2, on travaille pour  $(A_1, A_2)$  avec des normes basées sur  $L^\infty$ , qui sont adaptées aux hypothèses de type  $L^1$  sur  $A_3$ . La démonstration est basée sur un argument d'application contractante, après un bon choix de norme. Dans tous les cas discutés ci-dessous, il ne faudra pas oublier le résultat de la proposition 2, donnant la stabilité sous l'hypothèse de petitesse (3.8).

**Le cas  $\sigma_1\sigma_2 > 0$ .** Lorsque  $\sigma_1\sigma_2 > 0$ , on dispose tout d'abord d'un résultat de croissance exponentielle, valable dès que  $\sigma_1\sigma_2 > 0$  et pour toutes les normes  $L^p$ .

**Proposition 3.** *On suppose  $\sigma_1\sigma_2 > 0$ , on fixe  $s \in \mathbb{N}$  et on considère  $A_3 \in W^{s,\infty}(\mathbb{R}^d)$ ,  $A_3 \not\equiv 0$ . On note*

$$\gamma \equiv \sqrt{\sigma_1\sigma_2} \|A_3\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} > 0.$$

Alors, pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ , il existe  $C > 0$ , dépendant de  $A_3, p, s, \sigma_1$  et  $\sigma_2$  (mais pas de  $v_1$  ou  $v_2$ ) tel que pour tout  $t \geq 0$

$$\|\Sigma_t\|_{\mathcal{L}_c(W^{s,p}(\mathbb{R}^d))} \leq C(1+t^s)e^{\gamma t}.$$

En toute généralité sur le domaine et/ou la fonction  $A_3$ , on ne peut améliorer le taux de croissance exponentielle (voir  $[\mathcal{A}_5]$ ). Noter que malgré tout, le résultat de la proposition 2 subsiste. Lorsque  $\sigma_1\sigma_2 > 0$  et  $v_1v_2 < 0$ , l'on dispose quand même d'une meilleure estimation, et d'un critère pour l'existence de valeurs propres pour (3.5) dans  $\{\text{Im} < 0\}$ .

**Proposition 4.** *On suppose  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $\sigma_1\sigma_2 > 0$  et  $v_1v_2 < 0$ . Pour  $A_3 \in L^\infty(\mathbb{R})$ , on note*

$$\gamma_* \equiv 2\sqrt{\sigma_1\sigma_2} \frac{\sqrt{|v_1v_2|}}{|v_1 - v_2|} \|A_3\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \in ]0, \sqrt{\sigma_1\sigma_2} \|A_3\|_{L^\infty(\mathbb{R})}] = ]0, \gamma].$$

(i) *Supposons  $A_3 = \mathcal{A}_3 \mathbf{1}_{[a,b]}$  pour  $\mathcal{A}_3 \in \mathbb{C}^*$  et  $-\infty < a < b < +\infty$ . Si*

$$\frac{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}(b-a)|\mathcal{A}_3|}{\sqrt{|v_1v_2|}} = \frac{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}}{\sqrt{|v_1v_2|}} \left| \int_{\mathbb{R}} A_3(x) dx \right| \leq \pi/2,$$

(3.5) *n'a pas de valeur propre dans  $\{\text{Im} < 0\}$ , et si  $m \in \mathbb{N}^*$  est tel que*

$$\frac{(2m-1)\pi}{2} < \frac{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}(b-a)|\mathcal{A}_3|}{\sqrt{|v_1v_2|}} = \frac{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}}{\sqrt{|v_1v_2|}} \left| \int_{\mathbb{R}} A_3(x) dx \right| \leq \frac{(2m+1)\pi}{2},$$

(3.5) *a exactement  $m$  valeurs propres dans  $\{\text{Im} < 0\}$ , qui sont simples et appartiennent à  $]0, -i\gamma_*[$ .*

(ii) *Supposons que  $A_3 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R})$  est réelle et satisfait*

$$\sqrt{\frac{\sigma_1\sigma_2}{|v_1v_2|}} \times \left| \int_{\mathbb{R}} A_3(x) dx \right| > \frac{\pi}{2}.$$

Alors (3.5) *admet au moins une valeur propre  $\lambda_0 \in i\mathbb{R}_*^* \subset \{\text{Im} < 0\}$  avec un vecteur propre associé exponentiellement décroissant à l'infini. En particulier, il y a instabilité dans  $L^p(\mathbb{R})$  pour (3.3) quel que soit  $1 \leq p \leq \infty$ .*

(iii) *Si  $A_3 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R})$ , alors il existe une constante  $C$ , dépendant de  $\sigma_1, \sigma_2, v_1, v_2$  et  $A_3$ , tel que, pour tout  $t \geq 0$ ,*

$$\|\Sigma_t\|_{\mathcal{L}_c(L^\infty(\mathbb{R}))} \leq C e^{\gamma_* t}.$$

Faisons quelques remarques sur ces derniers résultats. Tout d'abord, dans (i), on peut, en rendant l'aire proche de  $\pi/2$ , rendre les valeurs propres aussi proches de  $-i\gamma_*$  que l'on veut, de sorte que l'estimation de (iii) est en général optimale (sur le taux). Insistons sur le fait que le taux  $\gamma_*$ , contrairement à  $\gamma$ , dépend des vitesses  $v_1$  et  $v_2$ , et est toujours  $\leq \gamma$ . De plus, pour  $v_1 + v_2 = 0$ ,  $\gamma = \gamma_*$  (mais la proposition 3 traite toutes les normes  $L^p$ ). La démonstration de (i) repose sur un calcul relativement explicite sur le problème de valeur propre (3.5).

Le cas (ii) est consistant avec la condition nécessaire et suffisante  $c = \pi/2$  dans le cas d'une fonction  $A_3$  réelle, de signe strict constant, et dans l'approximation WKB. Toutefois, notre résultat vaut pour une "pump wave"  $A_3$  juste réelle, sans contrainte de signe strict; d'autre part, dans l'approximation WKB, la condition (3.6) avec  $c = \pi/2$  est aussi suffisante. En tout cas, si  $d = 1$ ,  $\sigma_1\sigma_2 > 0$  et  $v_1v_2 < 0$ , le soliton

$$A_3(x) = \frac{2\eta}{\cosh(\eta x)}$$

est linéairement instable puisqu'il est dans  $L^1(\mathbb{R})$ , et d'aire  $\pi > \pi/2$ . Nous n'avons pas de résultat analogue lorsque  $A_3$  est à valeurs complexes. En effet, si  $A_3$  est réelle, on peut se ramener au cas où  $\psi_1$  et  $\psi_2$  le sont aussi. Nous prouvons alors (ii) par une analyse du plan de phase en coordonnées polaires pour  $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in \mathbb{R}^2$  solution de (3.5), en montrant que la condition

$$\sqrt{\frac{\sigma_1\sigma_2}{|v_1v_2|}} \times \left| \int_{\mathbb{R}} A_3(x) dx \right| > \frac{\pi}{2}$$

suffit pour connecter les solutions exponentiellement décroissantes en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . Celle-ci n'est plus valable pour  $A_3$  complexe. Au vu des résultats des proposition 2 et 4, il reste ouvert le cas, pour  $d = 1$ ,  $A_3$  réelle et  $\sigma_1\sigma_2 > 0 > v_1v_2$ ,

$$\sqrt{\frac{\sigma_1\sigma_2}{|v_1v_2|}} \times \int_{\mathbb{R}} |A_3|(x) dx \geq 1 \quad \text{mais} \quad \sqrt{\frac{\sigma_1\sigma_2}{|v_1v_2|}} \times \left| \int_{\mathbb{R}} A_3(x) dx \right| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Un exemple numérique est proposé dans [98], avec  $A_3$  une fonction comme au (i) avec une aire comprise entre 1 et  $\pi/2$  : pour le système (TWI), il y a instabilité et explosion en temps fini, ce qui suggère une instabilité pour (3.3), bien que (i) montre l'absence de valeur propre pour (3.5) dans le demi-espace  $\{\text{Im} < 0\}$ . Nous n'avons pas pu obtenir un meilleur taux de croissance que celui de (iii) en se restreignant aux méthodes d'énergie. Même en disposant d'une information sur les valeurs propres de (3.5) dans  $\{\text{Im} < 0\}$ , qui dépend alors fortement de  $A_3$ , les transcrire sur le semi-groupe de (3.3) n'est probablement pas une tâche aisée.

Toujours en se restreignant à la dimension 1, il nous reste à étudier le cas  $v_1 v_2 > 0$ , pour lequel on n'attend pas de valeur propre dans  $\{\text{Im} < 0\}$  pour (3.5). Cependant, nous allons voir que la question de la stabilité pour (3.3) est intimement liée à des conditions de localisation, et plus précisément d'intégrabilité, sur  $A_3$ . Celles-ci n'apparaissent pas lorsque l'on travaille avec le scattering inverse puisque l'on impose de la forte décroissance sur les fonctions.

**Proposition 5.** *On travaille sur  $\mathbb{R}$  et on se place dans le cas  $\sigma_1 \sigma_2 > 0$  et  $v_1 v_2 > 0$ .*

(i) *On suppose  $A_3 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  réelle,  $v_1 = v_2 \neq 0$ , et l'on fixe  $1 \leq p \leq \infty$ . Alors, on a stabilité pour (3.3) dans  $L^p(\mathbb{R})$  si, et seulement si*

$$\sup_{-\infty < a < b < +\infty} \left| \int_a^b A_3(y) dy \right| < \infty, \quad (3.9)$$

auquel cas il existe  $C_p$ , dépendant uniquement de  $p$ ,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , telle que pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\|\Sigma_t\|_{\mathcal{L}_c(L^p(\mathbb{R}))} \leq C_p \exp\left(\frac{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}}{|v_1|} \sup_{-\infty < a < b < +\infty} \left| \int_a^b A_3(y) dy \right|\right).$$

Si (3.9) n'est pas satisfaite, alors  $\|\Sigma_t\|_{\mathcal{L}_c(L^p(\mathbb{R}))} \rightarrow +\infty$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  et il existe  $C_p > 1$ , dépendant de  $p$ ,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  seulement, telle que pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\frac{1}{C_p} \exp\left(\frac{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}}{|v_1|} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{x-t|v_1|}^x A_3(y) dy \right|\right) \leq \|\Sigma_t\|_{\mathcal{L}_c(L^p(\mathbb{R}))} \leq C_p \exp\left(\frac{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}}{|v_1|} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{x-t|v_1|}^x A_3(y) dy \right|\right).$$

(ii) *Il existe une constante  $C$ , dépendant de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $v_1$  et  $v_2$  seulement, telle que si  $A_3 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  et  $t \geq 0$ , on a*

$$\|\Sigma_t\|_{\mathcal{L}_c(C_b(\mathbb{R}))} \leq C \exp\left(\sqrt{\frac{\sigma_1 \sigma_2}{v_1 v_2}} \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{x-t \max(|v_1|, |v_2|)}^x |A_3|(y) dy\right).$$

En particulier, si  $A_3 \in L^1(\mathbb{R})$ , on a stabilité dans  $C_b(\mathbb{R})$  pour (3.3) et, si  $t \geq 0$ ,

$$\|\Sigma_t\|_{\mathcal{L}_c(C_b(\mathbb{R}))} \leq C \exp\left(\sqrt{\frac{\sigma_1 \sigma_2}{v_1 v_2}} \|A_3\|_{L^1(\mathbb{R})}\right).$$

(iii) *On suppose que  $v_1 > 0$  et  $v_2 > 0$  (sinon, on change  $x$  en  $-x$ ), que  $A_3 \in C(\mathbb{R})$  est réelle,  $A_3 \notin L^1(\mathbb{R})$ , et satisfait*

$$A_3 = 0 \quad \text{sur } [1, +\infty), \quad -\sigma_1 A_3 \geq 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}, \quad -\sigma_1 A_3 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^-.$$

Alors,  $\|\Sigma_t\|_{\mathcal{L}_c(C_b(\mathbb{R}))} \rightarrow +\infty$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . De façon plus précise, il existe une constante  $c > 1$  dépendant uniquement de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $v_1$  et  $v_2$  telle que, pour  $t \geq 0$ ,

$$\|\Sigma_t\|_{\mathcal{L}_c(L^\infty(\mathbb{R}))} \geq c \exp\left(\frac{\min(v_1, v_2)}{\max(v_1, v_2)} \sqrt{\frac{\sigma_1 \sigma_2}{v_1 v_2}} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{x-t \max(v_1, v_2)}^x A_3(y) dy \right|\right).$$

Le cas (i) est très particulier car  $v_1 = v_2$  signifie qu'il n'y a qu'une seule vitesse de propagation. Ceci permet un calcul relativement explicite mettant en lumière la condition (3.9). L'estimation du (ii) montre que le problème (3.5) n'a pas de valeur propre dans  $\{\text{Im} < 0\}$  (en imposant aux vecteurs propres d'être dans  $L^\infty(\mathbb{R})$ ) dès que  $A_3 \in L^2(\mathbb{R})$  (et plus généralement dès que  $A_3 \in L^p(\mathbb{R})$  pour un  $1 \leq p < \infty$ ). Malgré tout, on peut avoir instabilité pour (3.3) comme indiqué au (iii). Pour ce dernier point, si l'on veut un exemple de telle fonction  $A_3$ , on peut prendre  $A_3$  telle que  $A_3(x) = \sigma_1(1-x)^\nu$  pour  $x \leq 0$ , avec un  $\nu \in (1/2, 1)$ , et  $A_3 \in H^s(\mathbb{R})$  pour tout  $s \in \mathbb{N}$ .

En dimension  $d = 1$  et quand  $\sigma_1 \sigma_2 > 0$ , il reste le cas dégénéré  $v_1 = 0 < v_2$  (lorsque  $v_1 = v_2 = 0$ , on a affaire à une simple équation différentielle en temps à résolvante explicite).

**Proposition 6.** *On travaille sur  $\mathbb{R}$  et on suppose  $\sigma_1\sigma_2 > 0$  et  $v_1 = 0 < v_2$ .*

(i) *On suppose que  $A_3 \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$  est tel que  $|A_3| \geq A_3 > 0$  sur un intervalle  $I$  de longueur  $\ell > 0$ . Alors, pour tout  $0 < \varepsilon < \ell$ , il existe une constante  $c_\varepsilon > 0$ , dépendant de  $\varepsilon$  et  $\ell$ , telle que, pour  $t \geq 0$ ,*

$$\|\Sigma_t\|_{\mathcal{L}_c(L^\infty(\mathbb{R}))} \geq c_\varepsilon \exp\left(\sqrt{\frac{\sigma_1\sigma_2}{v_2}} A_3 \sqrt{(\ell - \varepsilon)t}\right).$$

(ii) *On suppose que  $A_3 \in L^\infty(\mathbb{R})$  est à support compact dans un intervalle  $I$  de longueur  $\ell > 0$ . Alors, il existe une constante  $C > 0$ , dépendant de  $\ell$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $v_2$ , telle que, pour tout  $t \geq 0$ ,*

$$\|\Sigma_t\|_{\mathcal{L}_c(L^\infty(\mathbb{R}))} \leq C \exp\left(\sqrt{\frac{\sigma_1\sigma_2}{v_2}} \|A_3\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sqrt{\ell t}\right).$$

Dans ce cas, il y a donc toujours instabilité pour (3.3) (dès que  $A_3 \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$  n'est pas nulle) dans  $L^\infty(\mathbb{R})$ . Les estimations (i) et (ii) proviennent essentiellement du fait que l'on connaît une solution explicite de l'équation du télégraphiste

$$\partial_{XY}^2 + K^2 U = 0$$

exprimable à l'aide de la fonction  $J_0$  de Bessel (dont l'asymptotique à l'infini est connue), qui se trouve assez proche de l'équation pour  $A_2$

$$\partial_t(\partial_t + v_2\partial_x)A_2 = \sigma_1\sigma_2|A_3|^2 A_2.$$

Cependant, il faut toutefois garder des données initiales  $(A_1^{\text{in}}, A_2^{\text{in}})$  bornées. L'idée est alors d'utiliser une série entière pour fabriquer l'équivalent de sur- et sous-solutions.

Pour conclure, on s'intéresse au cas bi-dimensionnel. Lorsque  $v_1$  et  $v_2$  sont colinéaires, nous nous retrouvons dans un cas essentiellement 1d, où les variables en plus sont de simples paramètres. Il suffit donc d'imposer des conditions d'uniformité vis-à-vis de ces variables là dans les résultats précédents. Il en va de même lorsque  $d \geq 3$  et  $(v_1, v_2)$  n'est pas liée. En dimension  $d = 2$ , si les deux vitesses  $v_1$  et  $v_2$  ne sont pas colinéaires, on conçoit que si  $A_3$  est assez localisée, les deux équations de transport étalent suffisamment la solution, entraînant la stabilité.

**Proposition 7.** *On travaille sur  $\mathbb{R}^2$  et on suppose  $\sigma_1\sigma_2 > 0$  et que  $v_1$  et  $v_2$  ne sont pas colinéaires. On suppose aussi que  $A_3$  vérifie, pour un  $M \geq 0$  et un  $\nu > 1$ , l'estimation de décroissance*

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad |A_3|(x) \leq \frac{M}{1 + |x|_\infty^\nu}. \quad (3.10)$$

Alors, il existe une constante  $C(\nu, M)$ , dépendant de  $M$ ,  $\nu$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $v_1$  et  $v_2$  telle que, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\|\Sigma_t\|_{\mathcal{L}_c(C_b(\mathbb{R}^2))} \leq C(\nu, M).$$

**Le cas dégénéré  $\sigma_1\sigma_2 = 0$ .** Pour  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ , (3.3) devient juste deux équations de transport découplées. Pour  $\sigma_2 = 0 \neq \sigma_1$ , la situation est dégénérée, et on renvoie à [A5] (la stabilité peut dépendre de la norme, et de conditions de type intégrabilité sur  $A_3$ ).

## 3.2 Travail en cours : l'approximation de Schrödinger pour les trains d'ondes

Dans l'article [148] (section 4), G. Schneider met en évidence l'importance de l'étude des propriétés de stabilité du système (3.3) pour l'analyse de l'approximation de Schrödinger pour les trains d'ondes. Il s'agit de la description de la dispersion d'un train d'onde, qui a lieu pour l'équation (3.1) sur l'échelle de temps  $t \simeq \varepsilon^{-2}$ , alors que le régime transport se passe sur l'échelle plus courte  $t \simeq \varepsilon^{-1}$ . G. Schneider conjecture, lorsqu'il y a des résonances, que cette approximation de Schrödinger sera valable uniquement si le système (3.3) associé est stable (la "pump wave"  $A_3$  étant ici l'enveloppe du train d'onde). En effet, l'échelle de temps pour Schrödinger est grande devant celle du transport. Le cas traité par G. Schneider dans [148] (et de nombreux autres articles avec des collaborateurs) est celui correspondant au cas stable  $\sigma_1\sigma_2 < 0$ , pour lequel les normes naturelles sont de

type  $L^2$ . L'objectif du travail [A<sub>5</sub>] était de traiter complètement l'étude de la stabilité pour le système linéarisé (3.3) et de savoir avec quelles normes travailler.

De fait, dans [148], G. Schneider se focalise sur le cas  $d = 1$  et  $v_1 = v_2$  : la stabilité y est suggérée lorsque  $A_3 \in L^1(\mathbb{R})$ , et l'instabilité montrée sur un exemple explicite avec  $A_3 \notin L^1(\mathbb{R})$ . Ceci a conduit G. Schneider à la conjecture (au moins pour  $d = 1$  et  $\sigma_1\sigma_2 > 0$ ) que la stabilité a lieu dans (3.3) quand  $A_3$  est suffisamment localisée, mais pas dans le cas contraire. Les résultats déduits du scattering inverse (sous-section 3.1.1) et les résultats précédents (sous-section 3.1.2) montrent que la situation est plus complexe. Le travail [148] de G. Schneider a constitué la motivation originale de notre travail [A<sub>5</sub>].

Nous espérons à très court terme pouvoir justifier l'approximation de Schrödinger (ou Davey-Stewartson) pour les trains d'ondes pour une équation d'onde relativement générale de type (3.1) (travail en cours [45]). On pourra regarder [107] pour l'étude numérique des oscillations dans (KP-II), par exemple, décrites par un système de Davey-Stewartson. Cette asymptotique est bien connue pour les systèmes hyperboliques : voir les travaux de J.-L. Joly, G. Métivier et J. Rauch (*e.g.* [93]), de T. Colin [48] et de T. Colin et D. Lannes [49] et ceux de A. Babin et A. Figotin [10] et les références citées par exemple), ainsi que pour (KdV) (voir [160]). Pour une équation dispersive, il faut traiter soigneusement les résonances, et nous espérons avoir donné dans [A<sub>5</sub>] le bon cadre. Nous espérons aussi pouvoir prendre en compte des cas plus critiques : à proximité d'une caustique (disparition du terme dispersif de Schrödinger), dans le cas d'une résonance onde longue-onde courte (*i.e.* la vitesse du transport s'annule), *etc.* En outre, nous souhaitons clarifier le point suivant : l'équation de Schrödinger non linéaire dans ce contexte est obtenue en développant l'équation d'onde jusqu'à  $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ . Par exemple, il apparaît des conditions sur les termes à l'ordre 2 comme  $A_{\ell,2}$ , qui les lient de façon algébrique explicite aux termes d'ordre 1. En particulier, comment cela se traduit sur les données initiales en terme de préparation des données n'est pas très clairement indiqué. Par exemple, si l'on considère l'article [148], où le cadre est une équation d'onde de Boussinesq de type (3.1), le résultat de [148] affirme, étant donnée une solution régulière de (NLS), l'existence d'une solution de cette équation de Boussinesq de type (3.1) suffisamment proche de la solution approchée que l'on construit avec la solution de (NLS). Cependant, cette solution est extrêmement bien préparée au sens où les termes en  $\varepsilon^2$ , qui ne sont pas les termes dominants, ne sont pas quelconques mais déterminés par les termes dominants d'ordre  $\varepsilon$ . En ce sens, le résultat de G. Schneider [148] n'est pas à proprement parler un résultat de stabilité de l'approximation de Schrödinger pour les trains d'onde.

A plus long terme, la perspective est de justifier l'équation de Schrödinger non linéaire pour le problème des vagues décrites par le système d'Euler à surface libre. En comparaison avec le travail en cours [45] pour une équation semilinéaire dispersive est bien sûr le caractère très non linéaire de ce problème. Dans cette direction, mentionnons le travail [154] dans le cas des vagues à une dimension horizontale, en profondeur infinie et sans tension de surface (il n'y a pas de résonances). Une autre approche pourrait être de justifier l'équation de Zakharov pour les vagues (voir, *e.g.* [53]), qui consiste à faire un développement asymptotique en supposant juste l'élévation petite, mais sans hypothèse de spectre en pic.



# Chapitre 4

## Perspectives de travail

Ce chapitre regroupe et synthétise mes perspectives de travail, dont certaines ont déjà été détaillées le long des trois chapitres. Elle ne contient pas les travaux en cours.

### 4.1 Questions ouvertes sur la dynamique de (NLS)

**Justification du régime WKB avec donnée de Dirichlet homogène.** Si notre approche  $[\mathcal{A}_2]$  a permis d'étendre à un contexte beaucoup plus général la justification du régime semi-classique dans le cas défocalisant, il subsiste malgré tout le cas d'une donnée de Dirichlet homogène sur le bord (voir p. 15). C'est le contexte de la nucléation des vortex ([94], [142]). La difficulté essentielle est que le linéarisé a un noyau engendré par une fonction qui est bornée mais qui ne tend pas vers 0 à l'infini.

**Asymptotique (gKdV)/(gKP-I) pour (NLS).** Dans la limite (KdV)/(KP-I), lorsque  $\Gamma = 0$ , l'équation limite devient linéaire. Afin de voir les effets nonlinéaires, il est naturel d'augmenter la taille des données. Lorsque  $\Gamma = 0$ , le choix naturel est de remplacer

$$\Psi(t, x) = \left(1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon(\tau, z)\right) \exp(i\varepsilon\phi_\varepsilon(\tau, z)) \quad \tau = \varepsilon^3 t, \quad z_1 \equiv \varepsilon(x_1 - \mathbf{c}_s t), \quad z_\perp \equiv \varepsilon^2 x_\perp$$

par

$$\Psi(t, x) = \left(1 + \varepsilon A_\varepsilon(\tau, z)\right) \exp(i\phi_\varepsilon(\tau, z)) \quad \tau = \varepsilon^3 t, \quad z_1 \equiv \varepsilon(x_1 - \mathbf{c}_s t), \quad z_\perp \equiv \varepsilon^2 x_\perp.$$

En tenant compte de la contrainte de préparation non linéaire

$$\frac{\partial_{z_1} \phi_\varepsilon}{\mathbf{c}_s} - A_\varepsilon = -\frac{3\varepsilon}{2} A_\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

on obtient formellement (voir p. 25) l'équation de (KdV)/(KP-I) *cubique*

$$\frac{2}{\mathbf{c}_s} \partial_\tau A - \frac{1}{\mathbf{c}_s^2} \partial_{z_1}^3 A + \Gamma' A^2 \partial_{z_1} A + \Delta_{z_\perp} \partial_{z_1}^{-1} A = 0, \quad (\text{KdV}')/(\text{KP}'\text{-I})$$

où le coefficient

$$\Gamma' \equiv \frac{4f'''(1)}{\mathbf{c}_s^2} - 24$$

contient une dérivée troisième de  $f$  en 1. Comparé à notre résultat  $[\mathcal{A}_4]$ , la justification de cette dynamique requiert un effort supplémentaire. En effet, on est ici en présence d'un système proche d'un système hyperbolique, mais avec certains termes singuliers non linéaires. La difficulté est alors de réussir à montrer que ces solutions, qui sont dans les échelles du régime onde, existent sur un intervalle de temps beaucoup plus grand du fait de la préparation non linéaire. On peut bien sûr pousser plus loin et obtenir (gKdV)/(gKP-I) en supposant que les coefficients comme  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$ , ... s'annulent. Si les techniques hyperboliques ne marchent pas, un moyen de justifier ce régime est de travailler dans un espace de fonctions analytiques comme ceux utilisés dans [84] par N. Hayashi et J-C. Saut, par exemple. Dans ce cas, on n'utilise pas du tout la structure hyperbolique, mais on résout l'équation par un point fixe tenant compte de la préparation des données.

Cette limite vaut également, sur le plan formel, pour les ondes progressives dès que  $d = 2$  et  $\Gamma = 0 < \Gamma'$  (la dimension  $d = 1$  ayant déjà été traitée dans  $[\mathcal{A}_8]$  avec des techniques d'équations différentielles). Ces ondes bi-dimensionnelles ont été étudiées numériquement dans [47]. Si l'on veut pouvoir aborder cette limite transsonique, le premier point est de disposer d'un théorème assurant l'existence d'ondes progressives de vitesse  $c \simeq c_s$ , alors que les résultats actuels (en particulier ceux de  $[\mathcal{A}_6]$ ) s'arrêtent bien avant la vitesse du son  $c_s$ . Un tel résultat viendra probablement d'un théorème dans l'esprit du théorème 2 (p. 33) de M. Mariş, mais en devant trouver une contrainte différente de la contrainte de Pohozaev. Le second point sera de travailler avec les bonnes caractérisations variationnelles des "ground states" de (KP-I) cubique. Si la méthode d'obtention des ondes progressive est assez robuste, elle permettra peut-être d'avoir un résultat de multiplicité comme le suggère l'invariance de l'équation (KP-I) cubique par la symétrie  $A \leftrightarrow -A$  due à l'imparité. En revanche, l'obtention des bornes Sobolev uniformes sur la phase et l'amplitude suivra assez probablement la technique de découpage en Fourier utilisée dans  $[\mathcal{A}_7]$ .

• **Etude de la limite  $c \rightarrow 0$  lorsque  $\inf F < 0$ .** Lorsque  $\inf F < 0$ , on sait qu'il existe un "ground state" (stationnaire) pour (NLS). Les théorèmes d'existence du type théorème 2 (p. 33) de M. Mariş ([128]) ou notre théorème 4 (de  $[\mathcal{A}_6]$ ) fournissent des solutions de petite vitesse  $c$  en dimension  $d \geq 3$ . La justification de la convergence vers le ground state est un problème très naturel dans ce contexte. Une perspective à très court terme est de montrer que c'est aussi le cas lorsque  $d = 2$  (toujours avec  $\inf F < 0$ ). Pour le moment, nous n'avons pas réussi à montrer, pour les ondes obtenues avec  $I$ , que  $c$  tend vers 0 lorsque  $k \rightarrow k_\infty$ .

• **Modèles d'équations de Schrödinger couplées.** Afin de tester la robustesse des méthodes développées pour le théorème 2 (p. 33) de M. Mariş ([128]) ou notre théorème 4 (de  $[\mathcal{A}_6]$ ), il est naturel de les tester sur les problèmes d'équations de Schrödinger couplées comme (voir [71])

$$\begin{cases} i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Delta \Psi = \frac{1}{\varepsilon^2} \left( |\Psi|^2 - 1 + \frac{1}{\varepsilon^2} |\Phi|^2 \right) \Psi \\ i \delta \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Delta \Phi = \frac{1}{\varepsilon^2} \left( q^2 |\Psi|^2 - \varepsilon^2 k^2 \right) \Phi, \end{cases}$$

ou encore (cf. [23], [22])

$$\begin{cases} i \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \Delta \Psi_1 = \left( |\Psi_1|^2 - 1 + \alpha |\Psi_2|^2 \right) \Psi_1 \\ i \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + \Delta \Psi_2 = \left( |\Psi_2|^2 + \alpha |\Psi_1|^2 - 1 + \Lambda^2 \right) \Psi_2. \end{cases}$$

Les conditions à l'infini sont

$$|\Psi| \rightarrow 1 \quad \text{ou} \quad \Psi \rightarrow 1, \quad \text{et} \quad \Phi \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow +\infty,$$

et

$$(\Psi_1, \Psi_2) \rightarrow (\Psi_1^\infty, \Psi_2^\infty), \quad |x| \rightarrow +\infty$$

pour le second. Ces modèles sont relativement peu étudiés (voir cependant [131] et [39]), surtout pour la partie existence via des méthodes variationnelles. En effet, la difficulté principale est que dans les énergies

$$E(\Psi, \Phi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon^2 |\nabla \Psi|^2 + \frac{1}{q^2} |\nabla \Phi|^2 + \frac{1}{2} (1 - |\Psi|^2)^2 + \frac{|\Psi|^2 |\Phi|^2}{\varepsilon^2} - \frac{k^2}{q^2} |\Phi|^2 \, dx$$

ou

$$E(\Psi_1, \Psi_2) = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \Psi_1|^2 + |\nabla \Psi_2|^2 + \frac{1}{2} (|\Psi_1^\infty|^2 - |\Psi_1|^2)^2 + \frac{1}{2} (|\Psi_2^\infty|^2 - |\Psi_2|^2)^2 + \alpha (|\Psi_1|^2 - |\Psi_1^\infty|^2) (|\Psi_2|^2 - |\Psi_2^\infty|^2) \, dx,$$

la partie potentielle n'a pas de signe *a priori*. Comme l'approche par minimisation contrainte de  $I$  que nous avons développée ne requiert pas d'hypothèse de signe, la perspective naturelle est de l'employer pour ces modèles et fournir les premiers résultats d'existence par minimisation sous contrainte.

• **Stabilité en dimension 1.** Pour la dynamique de (NLS), la dimension 1 est très particulière en raison de la définition du moment, qui devrait être

$$P(\Psi = Ae^{i\phi}) = \int_{\mathbb{R}} (A^2 - r_0^2) \partial_x \phi \, dx$$



mais ne vaut que lorsque  $\Psi$  ne s'annule pas. Il est donc difficile de définir le moment dans un espace d'énergie naturel.

Les perspectives de travail sur le cas mono-dimensionnel sont (voir p. 53-55) l'étude de la stabilité dans les cas laissés ouverts par les théorèmes (p. 50) 8 (de Z. Lin [122]) et 9 (d'A. de Bouard [54]), c'est-à-dire les cas :

- $0 < c < \mathbf{c}_s$  et  $\frac{dP}{dc} = 0 \neq \frac{d^2P}{dc^2}$ , *i.e.* aux points de rebroussement ;
- $c = \mathbf{c}_s$ , dès qu'il existe une onde sonique non triviale ;
- $c = 0$  lorsque l'onde stationnaire est un "kink", c'est-à-dire qu'elle s'annule.

Dans ces cas, l'approche de Grillakis-Shatah-Strauss ne vaut plus telle quelle, sauf peut-être pour prouver l'instabilité dans le cas  $c = \mathbf{c}_s$  et  $\frac{dP}{dc} > 0$ . Il est donc nécessaire d'adapter la méthode, soit en modifiant la théorie de Grillakis-Shatah-Strauss, soit en adoptant la démarche de T. Cazenave et P.-L. Lions [44] qui prouve la stabilité orbitale des ondes progressives obtenues par minimisation de  $E$  à  $P$  fixé, comme déjà vu à la section 2.1. Il n'est en outre pas totalement évident que l'on puisse avoir accès à une information spectrale sur la linéarisation de  $\mathcal{F}_c$  dans cette situation dégénérée. Une possibilité est de s'inspirer de l'approche de M. Grillakis [79] et [80] pour montrer l'existence de valeur propre instable sur le linéarisé de (NLS). Si l'on se tourne vers la seconde approche pour montrer de la stabilité, la difficulté est de justifier une propriété de minimisation *locale* de  $E$  sous contrainte que  $P$  est fixé. Cela suppose de pouvoir trouver un ouvert adapté dans l'espace d'énergie. Bien sûr, le cas du "kink" est probablement le plus difficile, car la définition du moment pour des fonctions qui s'annule est très délicat (pour (GP), voir [32], ainsi que [68] pour l'approche par scattering inverse). L'instabilité (linéaire et) non linéaire peut aussi se montrer avec l'étude de la fonction de Vakhitov-Kolokolov (voir [60]).

• **Vers des résultats de multiplicité ?** Nous donnons quelques pistes plaidant pour des résultats de multiplicité d'ondes progressives en dimension  $d \geq 2$ . Noter qu'en dimension  $d = 1$ , l'étude de  $[\mathcal{A}_8]$  donne toutes les solutions puisque l'on se ramène à une équation différentielle de type Newton.

★ Nous avons déjà mentionné comment obtenir formellement l'équation (KP-I) cubique

$$\frac{1}{\mathbf{c}_s^2} \partial_{z_1} A + \Gamma' A^2 \partial_{z_1} A - \frac{1}{\mathbf{c}_s^2} \partial_{z_1}^3 A + \partial_{z_2}^2 \partial_{z_1}^{-1} A = 0$$

lorsque  $\Gamma = 0$ , et plus généralement (gKdV)/(gKP-I), à partir de (NLS). Si cette limite peut être justifiée dans le cas focalisant, elle peut sans doute montrer l'existence de *deux* branches transsoniques, vu que l'équation pour les ondes progressives est impaire. Notre étude numérique dans [47] confirme cette intuition.

★ Au chapitre 2, nous avons justifié la convergence, dans la limite transsonique, en dimension  $d = 2$ , des ondes progressives de (NLS) vers celles de (KP-I) (en prolongeant le travail [30]). Ceci vaut lorsque  $\Gamma \neq 0$  pour les solutions obtenues par un procédé de minimisation sous contrainte, donc d'indice de Morse égal à un. Il est attendu que le "ground state" de (KP-I) soit le "lump". Par ailleurs, l'équation (KP-I) est intégrable ( $d = 2$ ,  $\Gamma \neq 0$ ), et D. Pelinovsky et Y. Stepanyants dans [141] ont déterminé d'autres solutions en onde solitaire explicites données par des fractions rationnelles. Ces solutions ne sont pas des "ground states" et correspondent probablement à des solutions d'indice de Morse plus élevé. Etant donné que la dynamique de (NLS) est approchée (voir la section 1.3.3) par (KP-I) dans cette limite transsonique, il est naturel de regarder s'il existe des ondes progressives de (NLS) qui ressemblent asymptotiquement à ces ondes solitaires de (KP-I). Cela voudrait dire qu'il existerait d'autres branches que celle donnée figure 2.1. Bien sûr, il faudrait commencer par une étude numérique avant d'essayer de trouver des techniques variationnelles adaptées pour ce problème. Parallèlement, l'étude peut être menée sur (KP-I). A ce sujet, on mentionne l'article [156] de Z.-Q. Wang et M. Willem qui justifie l'existence d'au moins deux solutions pour (KP-I) en dimension  $d = 2$  (incluant les cas quadratique et cubique, par exemple).

★ L'équation (NLS) en dimension  $d = 2$  possède des solutions vortex du type (en polaires)

$$a(r)e^{in\theta},$$

pour un  $n \in \mathbb{Z}$  non nul, où  $a$  est solution d'une équation différentielle. Dans l'article [138], Y. Ovchinnikov et I. Sigal ont conjecturé l'existence de solutions de (GP) ayant un degré non nul à l'infini (c'est-à-dire  $\simeq e^{in\theta}$  quand  $|x| \rightarrow +\infty$ ) mais n'étant pas à symétrie radiale, *i.e.* pas du type  $a(r)e^{in\theta}$ . Leur solution ressemblerait à plusieurs

vortex disposés sur un polygone régulier et son centre. Même pour  $n = 2$ , une telle solution à symétrie brisée pourrait exister, et nous n'avons pas de résultat sur ce sujet. Une perspective à moyen terme est d'étudier ces solutions stationnaires.

★ Toujours en dimension  $d = 2$ , dans la limite  $c \rightarrow 0$  où l'onde progressive a des vortex, il existe des ondes avec une autre structure que la structure minimisante formée de deux vortex  $(+1, -1)$ . Par exemple, on peut imaginer deux vortex  $(+2, -2)$ , ou une configuration à quatre vortex  $(+1, +1, -1, -1)$ , ou bien des structures plus compliquées. Il est connu que les configurations en question doivent être critiques pour l'énergie de Kirchhoff régissant l'interaction entre ces vortex, donc une première étape est bien sûr de déterminer ces configurations critiques. Il est facile de voir que dans le cas  $(+2, -2)$ , on peut trouver une localisation critique analogue au cas  $(+1, -1)$ . Il semble que les seules configurations critiques sont celles du type  $(+m, -m)$ , avec  $m \geq 1$ .

★ Pour la nonlinéarité cubique-quintique, il existe une solution stationnaire appelée "ground state", qui est une fonction  $U_0$  réelle et radiale croissant de  $U_0(0) \in (0, r_0)$  à  $r_0$ , et qui est instable (voir A. de Bouard [54]). En fait, d'autres solutions radiales existent dans ce cas : voir [21] pour  $d \geq 3$ , [20] si  $d = 2$ , ainsi que [78]. Une piste de travail est de déterminer, dans l'esprit du travail [132], si ces solutions appartiennent à des branches continues (en vitesse) d'ondes progressives pour (NLS) cubique-quintique.

• **Le modèle d'Euler-Korteweg.** Le modèle d'Euler-Korteweg pour les fluides capillaires s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho v) = 0 \\ \partial_t v + (v \cdot \nabla)v = \nabla \left( F_0'(\varrho) + \frac{1}{2} K'(\varrho) |\nabla \varrho|^2 + K(\varrho) \Delta \varrho \right), \end{cases} \quad (\text{EK})$$

où  $K$  et  $F_0$  sont des fonctions de  $\varrho$ , avec  $K$  régulière pour  $\varrho > 0$ . On renvoie à l'article de revue [18] de S. Benzoni-Gavage pour les résultats récents pour ce modèle. L'énergie de ce système s'écrit

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varrho |u|^2 + K(\varrho) |\nabla \varrho|^2 + 2F_0(\varrho) \, dx.$$

Lorsque  $K(\varrho) = \frac{1}{4\varrho}$ , le système (EK) est exactement le système de Madelung obtenu à partir de l'équation de Schrödinger non linéaire

$$i\partial_t \Psi + \frac{1}{2} \Delta \Psi = F_0'(|\Psi|^2) \Psi,$$

où la nonlinéarité  $f$  est la fonction  $F_0'$  qui peut être par exemple telle que le potentiel  $F_0$  présente une structure double puits. Le problème de Cauchy est étudié par S. Benzoni-Gavage, S. Descombes et R. Danchin dans [19], et l'on renvoie à [90] et [91] pour une étude numérique. Etant donnée la proximité de ce modèle avec le système hydrodynamique donné par la transformation de Madelung, une perspective naturelle est d'étendre nos résultats à ce modèle. Ceci vaut autant pour la partie dynamique (régime onde linéaire, régime (KdV)/(KP)) que pour les ondes progressives en dimension  $d \geq 2$ .

• **Interaction onde-vortex.** L'équation de Gross-Pitaevskii bi-dimensionnelle possède des solutions stationnaires particulières, d'énergie infinie que sont les vortex : ce sont des solutions du type (en coordonnées polaires)  $V_n(x) = f_n(r) e^{in\theta}$ , où  $n$  est un entier relatif non nul, le degré, et  $f_n$  est une fonction sur  $\mathbb{R}_+$  qui croît de 0 à  $1 = r_0$ . Etant donnée une configuration dans le plan de vortex situés à grande distance les uns des autres (avec une longueur caractéristique  $\ell \gg 1$ ), la dynamique de ces vortex dans (NLS) sur l'échelle de temps  $\ell$  est bien connue et gouvernée par la loi de Kirchhoff pour les points vortex (pour les justifications, voir, par exemple, [35] et les références qui y sont citées). Par exemple, deux vortex avec  $n = 1$  tournent autour de leur centre de gravité à vitesse constante. Sur une plus longue échelle de temps, il faut tenir compte des ondes émises par les vortex. Dans la configuration des deux vortex avec  $n = 1$ , cela a l'effet de les éloigner très, très lentement l'un de l'autre, et d'envoyer des ondes à l'infini, ce qui assure la préservation de l'"énergie" (bien qu'elle soit infinie). Pour des arguments théoriques, on pourra regarder [139] et [111], et [157] pour une étude numérique.

Une perspective à long terme est d'étudier cette intéressante dynamique. La difficulté est que la vitesse d'éloignement est extrêmement petite, ce qui suppose une analyse très fine de la solution de l'équation. Un problème plus simple pourrait être d'envisager l'interaction d'un seul vortex avec une onde, par exemple une onde plane, comme envisagé dans le livre de L.M. Pismen [143].

• **Instabilité transverse.** F. Rousset et N. Tzvetkov ont développé une théorie générale dans le but de traiter l'instabilité transverse des ondes progressives mono-dimensionnelles (voir, *e.g.*, [146]). L'approche est purement e.d.p.iste et n'utilise pas d'argument de scattering inverse, par exemple. Dans [147], ils montrent l'instabilité transverse des ondes 1d pour le modèle de Gross-Pitaevskii, ce qui était formellement donné dans [113]. La démonstration repose sur les propriétés spectrales du linéarisé, et sont donc plus difficiles à vérifier en dimension plus grande. Cependant, la question de l'instabilité transverse (comme suggérée dans [112]) des ondes bi-dimensionnelles est très naturelle. On notera que ces ondes 2d n'ont pas une décroissance exponentielle mais seulement algébrique.

## 4.2 Questions ouvertes sur l'approximation de Schrödinger pour les trains d'onde

Dans le travail [ $\mathcal{A}_5$ ], nous souhaitons préparer la justification de l'approximation de Schrödinger pour les trains d'onde dans une équation dispersive générale. En effet, dans l'article [148] (section 4), G. Schneider met en évidence l'importance de l'étude des propriétés de stabilité du système d'interaction à trois ondes pour l'analyse de l'approximation de Schrödinger pour les trains d'ondes. L'objectif du travail [ $\mathcal{A}_5$ ] était de traiter complètement l'étude de la stabilité pour le système d'interaction à trois ondes linéarisé et de savoir avec quelles normes travailler (basées sur  $L^2$  ou sur  $L^\infty$ ). Nous espérons aussi pouvoir prendre en compte des cas plus critiques : à proximité d'une caustique (disparition du terme dispersif de Schrödinger), dans le cas d'une résonance onde longue-onde courte (*i.e.* la vitesse du transport s'annule), *etc.* En outre, nous souhaitons clarifier la question de la stabilité de l'approximation de Schrödinger en supprimant autant que possible les hypothèses de préparation de données.

L'analyse diffractive pour les trains d'onde est bien connue pour les systèmes hyperboliques : voir les travaux de J.-L. Joly, G. Métivier et J. Rauch (*e.g.* [93]), de T. Colin [48] et de T. Colin et D. Lannes [49] et ceux de A. Babin et A. Figotin [10], ainsi que pour (KdV) (voir [160]). En revanche, dans le cas d'un système hyperbolique avec nonlinéarité quadratique, les résonances empêchent une approximation valable en temps  $\simeq \varepsilon^{-2}$ .

A plus long terme, la perspective est de justifier l'équation de Schrödinger non linéaire pour le problème des vagues décrites par le système d'Euler à surface libre. En comparaison avec le travail en cours [45] pour une équation semilinéaire dispersive est bien sûr le caractère très non linéaire de ce problème. Dans cette direction, mentionnons le travail [154] dans le cas des vagues à une dimension horizontale, en profondeur infinie et sans tension de surface (il n'y a pas de résonances). Une autre approche pourrait être de justifier l'équation de Zakharov pour les vagues (voir, *e.g.* [53]), qui consiste à faire un développement asymptotique en supposant juste l'élévation petite, mais sans hypothèse de spectre en pic.



# Bibliographie

- [1] M. ABID, C. HUEPE, S. METENS, C. NORE, C. T. PHAM, L. S. TUCKERMAN ET M. E. BRACHET, Gross-Pitaevskii dynamics of Bose-Einstein condensates and superfluid turbulence. *Fluid Dynamics Research* **33**, 5-6 (2003), 509-544.
- [2] M. ABLOWITZ, D. KAUP, A. NEWELL ET H. SEGUR, The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems. *Studies in Appl. Math.* **53**, no. 4 (1974), 249-315.
- [3] T. ALAZARD ET R. CARLES, Supercritical geometric optics for nonlinear Schrödinger equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **94**, no. 1 (2009), 315-347.
- [4] T. ALAZARD ET R. CARLES, Loss of regularity for supercritical nonlinear Schrödinger equations. *Math. Ann.* **343**, no. 2 (2009), 397-420.
- [5] T. ALAZARD ET R. CARLES, Semi-classical limit of Schrödinger-Poisson equations in space dimension  $n \geq 3$ . *J. Differential Equations* **233**, no. 1 (2007), 241-275.
- [6] L. ALMEIDA, Topological sectors for Ginzburg-Landau energy. *Rev. Mat. Iber.* **15**, (3) (1999), 487-546.
- [7] L. ALMEIDA ET F. BÉTHUEL, Topological methods for the Ginzburg-Landau equations. *J. Math. Pures Appl.* **77** (1998), 1-49.
- [8] B. ALVAREZ-SAMANIEGO ET D. LANNES, Large time existence for 3D water-waves and asymptotics. *Invent. Math.* **171**, no. 3 (2008), 485-541.
- [9] R. ANTON, Global existence for defocusing cubic NLS and Gross-Pitaevskii equations in exterior domains. *J. Math. Pures Appl.* (9) **89**, no. 4 (2008), 335-354.
- [10] A. BABIN ET A. FIGOTIN, Wavepacket preservation under nonlinear evolution. *Comm. Math. Phys.* **278**, no. 2 (2008), 329-384.
- [11] I. BARASHENKOV ET E. PANOVA, Stability and evolution of the quiescent and travelling solitonic bubbles. *Physica D : Nonlinear Phenomena* **69**, 1-2 (1993), 114-134.
- [12] I. BARASHENKOV ET V. MAKHANKOV, Soliton-like "bubbles" in a system of interacting bosons. *Physics Letters A* **128**, 1-2, 21 (1988) 52-56.
- [13] F. BARONIO, M. CONFORTI, M. ANDREANA, V. COUDERC, C. DE ANGELIS, S. WABNITZ, A. BARTHÉLÉMY ET A. DEGASPERIS, Frequency Generation and Solitonic Decay in Three-Wave Interactions. *Opt. Express* **17** (2009), 13889-13894.
- [14] R. BEALS ET R. COIFMAN, Inverse scattering and evolution equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **38**, no. 1 (1985), 29-42.
- [15] T. BENJAMIN, The stability of solitary waves. *Proc. Roy. Soc. (London) Ser. A* **328** (1972), 153-183.
- [16] W. BEN YOUSSEF ET T. COLIN, Rigorous derivation of Korteweg-de Vries-type systems from a general class of nonlinear hyperbolic systems. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* **34**, no. 4 (2000), 873-911.
- [17] W. BEN YOUSSEF ET D. LANNES, The long wave limit for a general class of 2D quasilinear hyperbolic problems. *Comm. Partial Differential Equations* **27**, no. 5-6 (2002), 979-1020.
- [18] S. BENZONI-GAVAGE, Propagating phase boundaries and capillary fluids. *Lecture notes of CIRM summer school Mathematical Fluid Dynamics, Levico Terme, June 27th-July 2nd, (2010)*. Disponible à l'adresse <http://math.univ-lyon1.fr/benzoni/>
- [19] S. BENZONI-GAVAGE, S. DESCOMBES ET R. DANCHIN, On the well-posedness of the Euler-Korteweg model in several space dimension. *Indiana Univ. Math. J.* **56**, 4 (2007), 1499-1579.
- [20] H. BERESTYCKI, T. GALLOUËT, AND O. KAVIAN, Equations de champs scalaires euclidiens non linéaires dans le plan. (French) [Nonlinear Euclidean scalar field equations in the plane] *C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math.* **297**, no. 5 (1983), 307-310.

- [21] H. BERESTYCKI AND P.-L. LIONS, Nonlinear scalar field equations. II. Existence of infinitely many solutions. *Arch. Rational Mech. Anal.* **82**, no. 4 (1983), 347-375.
- [22] N. BERLOFF, Nucleation of solitary wave complexes in two-component mixture Bose-Einstein condensates. *arXiv :cond-matt/0412743* (2005).
- [23] N. BERLOFF, Solitary Wave Complexes in Two-Component Condensates. *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 120401 (2005).
- [24] N. BERLOFF, Evolution of rarefaction pulses into vortex rings. *Phys. Rev. B* **65**, 174518 (2002).
- [25] N. BERLOFF, Quantised vortices, travelling coherent structures and superfluid turbulence. In *Stationary and time dependent Gross-Pitaevskii equations. A. Farina and J.-C. Saut Eds. Contemp. Math. Vol. 473*, AMS, Providence, RI, (2008), 26-54.
- [26] N. BERLOFF ET P. ROBERTS, Motions in a Bose condensate X. New results on stability of axisymmetric solitary waves of the Gross-Pitaevskii equation. *J. Phys. A : Math. Gen.*, **37** (2004), 11333-11351.
- [27] N. BERLOFF ET P. ROBERTS, Nonlinear Schrödinger equation as a model of superfluid helium. in *"Quantized Vortex Dynamics and Superfluid Turbulence"* edited by C.F. Barenghi, R.J. Donnelly and W.F. Vinen, *Lecture Notes in Physics*, volume **571**, Springer-Verlag, (2001).
- [28] F. BÉTHUEL, R. DANCHIN ET D. SMETS, On the linear wave regime of the Gross-Pitaevskii equation. *J. Anal. Math.* **110** (2010), 297-338.
- [29] F. BÉTHUEL, P. GRAVEJAT ET J-C. SAUT, Travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation II. *Comm. Math. Phys.* **285**, 2 (2009), 567-651.
- [30] F. BÉTHUEL, P. GRAVEJAT ET J-C. SAUT, On the KP-I transonic limit of two-dimensional Gross-Pitaevskii travelling waves. *Dynamics of PDE* **5**, 3 (2008), 241-280.
- [31] F. BÉTHUEL, P. GRAVEJAT ET J-C. SAUT, Existence and properties of travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation. *Stationary and time dependent Gross-Pitaevskii equations*, 55-103, *Contemp. Math.*, **473**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2008).
- [32] F. BÉTHUEL, P. GRAVEJAT, J-C. SAUT ET D. SMETS, On the Korteweg-de Vries long-wave approximation of the Gross-Pitaevskii equation I. *Internat. Math. Res. Notices*, no. 14, (2009), 2700-2748.
- [33] F. BÉTHUEL, P. GRAVEJAT, J-C. SAUT ET D. SMETS, On the Korteweg-de Vries long-wave approximation of the Gross-Pitaevskii equation II. *Comm. Partial Differential Equations* **35**, no. 1 (2010), 113-164.
- [34] F. BÉTHUEL, P. GRAVEJAT, J-C. SAUT ET D. SMETS, Orbital stability of the black soliton to the Gross-Pitaevskii equation. *Indiana Math. Univ. J.* **57**, 6, (2008) 2611-2642.
- [35] F. BÉTHUEL, R. JERRARD ET D. SMETS, On the NLS dynamics for infinite energy vortex configurations on the plane. *Rev. Mat. Iberoam.* **24**, no. 2 (2008), 671-702.
- [36] F. BÉTHUEL, G. ORLANDI ET D. SMETS, Vortex rings for the Gross-Pitaevskii equation. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **6**, no. 1 (2004), 17-94.
- [37] F. BÉTHUEL ET J-C. SAUT, Travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation I. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique*, **70**, (2) (1999), 147-238.
- [38] J. BONA, P. SOUGANIDIS ET W. STRAUSS, Stability and instability of solitary waves of Korteweg-de Vries type. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **411** (1987), 395-412.
- [39] O. BOUCHEL, Quelques équations et systèmes d'équations de Schrödinger non linéaires. *Thèse, Université Paris-Sud*, (2006).
- [40] M. BOUSSINESQ, Essai sur la théorie des eaux courantes. *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences Inst. France (Séries 2)* **23** (1877), 1-680.
- [41] Y. BRENIER, Convergence of the Vlasov-Poisson system to the incompressible Euler equations. *Comm. Partial Differential Equations* **25** (2000), no. 3-4, 737-754.
- [42] N. BURQ, P. GÉRARD ET N. TZVETKOV, On nonlinear Schrödinger equations in exterior domains. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **21**, no. 3 (2004), 295-318.
- [43] R. CARLES, WKB analysis for nonlinear Schrödinger equations with potential. *Comm. Math. Phys.* **269**, 1 (2007), 195-221.
- [44] T. CAZENAVE ET P.-L. LIONS. Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations. *Commun. Math. Phys.* **85**, (4) (1982), 549-561.

- [45] D. CHIRON, On the Schrödinger approximation for wavetrains in semilinear equations. *En préparation*.
- [46] D. CHIRON, Travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation in dimension larger than two. *Nonlinear Anal.* **58**, (1-2) (2004), 175-204.
- [47] D. CHIRON ET C. SCHEID, Travelling waves for the Nonlinear Schrödinger Equation with general nonlinearity in dimension two. I. *Travail en cours*.
- [48] T. COLIN, Rigorous derivation of the nonlinear Schrödinger equation and Davey-Stewartson systems from quadratic hyperbolic systems. *Asymptotic Analysis*, **31**, no. 1 (2002), 69-91.
- [49] T. COLIN ET D. LANNES, Justification of and long-wave correction to Davey-Stewartson systems from quadratic hyperbolic systems. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **11**, no. 1 (2004), 83-100.
- [50] T. COLIN ET A. SOYEUR, Some singular limits for evolutionary Ginzburg-Landau equations. *Asymptotic Anal.* **13** (1996), 361-372.
- [51] J. COLLIANDER, M. KEEL, G. STAFFILANI, H. TAKAOKA ET T. TAO, Global well-posedness and scattering for the energy-critical nonlinear Schrödinger equation in  $\mathbb{R}^3$ . *Ann. of Math. (2)* **167**, no. 3 (2008), 767-865.
- [52] C. COSTE, Nonlinear Schrödinger equation and superfluid hydrodynamics. *Eur. Phys. J. B* **1** (1998), 245-253.
- [53] A. CRAIK, Wave interactions and fluid flows. *Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, (1985).
- [54] A. DE BOUARD, Instability of stationary bubbles. *SIAM J. Math. Anal.* **26**, no. 3 (1995), 566-582.
- [55] A. DE BOUARD ET J.-C. SAUT, Solitary waves of generalized Kadomtsev-Petviashvili equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **14**, no. 2 (1997), 211-236.
- [56] A. DE BOUARD ET J.-C. SAUT, Symmetries and decay of the generalized Kadomtsev-Petviashvili solitary waves. *SIAM J. Math. Anal.* **28**, no. 5 (1997), 1064-1085.
- [57] A. DE BOUARD ET J.-C. SAUT, Remarks on the stability of generalized KP solitary waves. In *Mathematical problems in the theory of water waves (Luminy, 1995)*, volume 200 of *Contemp. Math.*, pages 7584. Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1996).
- [58] A. DE LAIRE, Non-existence for travelling waves with small energy for the Gross-Pitaevskii equation in dimension  $N \geq 3$ . *C. R. Math. A. S. Vol.* **347**, 7-8 (2009), 375-380.
- [59] B. DESJARDINS ET C.-K. LIN, On the semiclassical limit of the general modified NLS equation. *J. Math. Anal. Appl.* **260**, no. 2 (2001), 546-571.
- [60] L. DI MENZA ET C. GALLO, The black solitons of one-dimensional NLS equations. *Nonlinearity* **20**, no. 2 (2007), 461-496.
- [61] N. ERCOLANI, S. JIN, C. LEVERMORE ET W. MACEVOY, The zero-dispersion limit for the odd flows in the focusing Zakharov-Shabat hierarchy. *Int. Math. Res. Not.* no. 47, (2003), 2529-2564.
- [62] T. FRISCH, Y. POMEAU ET S. RICA, Transition to dissipation in a model of superflow. *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992), 1644-1648.
- [63] C. GALLO, The Cauchy problem for defocusing nonlinear Schrödinger equations with non-vanishing initial data at infinity. *Comm. Partial Differential Equations* **33**, no. 4-6 (2008), 729-771.
- [64] C. GALLO, Schrödinger group on Zhidkov spaces. *Adv. Differential Equations*, **9**, 5-6 (2004), 509-538.
- [65] P. GÉRARD, The Gross-Pitaevskii equation in the energy space. In *Stationary and time dependent Gross-Pitaevskii equations*, 129-148, *Contemp. Math.*, 473, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2008).
- [66] P. GÉRARD, The Cauchy problem for the Gross-Pitaevskii equation. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire*, **23**, (5) (2006), 765-779.
- [67] P. GÉRARD, Remarques sur l'analyse semi-classique de l'équation de Schrödinger non linéaire. *Séminaire sur les Equations aux Dérivées Partielles, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1992-1993, Exp. No. XIII*, 13 pp.
- [68] P. GÉRARD ET Z. ZHANG, Orbital stability of traveling waves for the one-dimensional Gross-Pitaevskii equation. *J. Math. Pures Appl. (9)* **91**, no. 2 (2009), 178-210.
- [69] J. GINIBRE ET G. VELO, The global Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation revisited. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **2** (1985), no. 4, 309-327.

- [70] V. GINZBURG ET L. PITAEVSKII, On the theory of superfluidity. *Sov. Phys. JETP* **34** (1958), 1240.
- [71] J. GRANT ET P. ROBERTS, Motions in a Bose condensate III. The structure and effective masses of charged and uncharged impurities. *J. Phys. A : Math., Nucl. Gen.*, **7**, no. 2 (1974), 260-279.
- [72] P. GRAVEJAT, Asymptotics of the solitary waves for the generalized Kadomtsev-Petviashvili equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **21**, no. 3 (2008), 835-882.
- [73] P. GRAVEJAT, A non-existence result for the travelling waves in the Gross-Pitaevskii equation, *Comm. Math. Phys.* **243**, 1 (2003), 93-103.
- [74] P. GRAVEJAT, First order asymptotics for the travelling waves in the Gross-Pitaevskii equation. *Adv. Differential Equations* **11**, 3 (2006), 259-280.
- [75] E. GRENIER, Semiclassical limit of the nonlinear Schrödinger equation in small time. *Proc. Amer. Math. Soc.* **126**, no. 2 (1998), 523-530.
- [76] E. GRENIER, On the derivation of homogeneous hydrostatic equations. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* **33**, no. 5 (1999), 965-970.
- [77] E. GRENIER, Pseudo-differential energy estimates of singular perturbations. *Comm. Pure Appl. Math.* **50**, no. 9 (1997), 821-865.
- [78] M. GRILLAKIS, Existence of nodal solutions of semilinear equations in  $\mathbf{R}^N$ . *J. Differential Equations* **85**, no. 2 (1990), 367-400.
- [79] M. GRILLAKIS, Analysis of the linearization around a critical point of an infinite-dimensional Hamiltonian system. *Comm. Pure Appl. Math.* **43**, no. 3 (1990), 299-333.
- [80] M. GRILLAKIS, Linearized instability for nonlinear Schrödinger and Klein-Gordon equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **41**, no. 6 (1988), 747-774.
- [81] M. GRILLAKIS, J. SHATAH ET W. STRAUSS, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I. *J. Funct. Anal.* **74** (1987), 160-197.
- [82] E. GROSS, Hydrodynamics of a superfluid condensate. *J. Math. Phys.* **4** (2) (1963), 195-207.
- [83] V. HAKIM, Nonlinear Schrödinger flow past an obstacle in one dimension. *Phys. Rev. E* **55** (1997), 2835-2845.
- [84] N. HAYASHI ET J-C. SAUT, Global existence of small solutions to the Davey-Stewartson and the Ishimori systems. *Differential Integral Equations* **8**, no. 7 (1995), 1657-1675.
- [85] C. HUEPE ET M.-E. BRACHET, Solutions de nucléation tourbillonnaires dans un modèle découlement superfluide. *C.R. Acad. Sci. Paris* **325 II** (1997), 195-202.
- [86] A. IONESCU, C. KENIG ET D. TATARU, Global well-posedness of the KP-I initial-value problem in the energy space. *Invent. Math.* **173**, no. 2 (2008), 265-304.
- [87] S. IORDANSKII ET A. SMIRNOV, Three-dimensional solitons in He II. *JETP Lett.* **27**, (10) (1978), 535-538.
- [88] R. IÓRIO ET W. NUNES, On equations of KP-type. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh A* **128** (1998), 725-743.
- [89] O. IVANOVICI, On Schrödinger equation outside strictly convex obstacles. *Anal. PDE* **3**, no. 3 (2010), 261-293.
- [90] D. JAMET, O. LEBAIGUE, N. COUTRIS ET J. DELHAYE, The second gradient method for the direct numerical simulation of liquid-vapor flows with phase change. *J. Comput. Phys.* **169**, no. 2 (2001), 624-651.
- [91] D. JAMET, D. TORRES ET J. BRACKBILL, On the Theory and Computation of Surface Tension : The Elimination of Parasitic Currents through Energy Conservation in the Second-Gradient Method. *J. Comput. Phys.* **182**, no. 1 (2002), 262-276.
- [92] S. JIN, C. LEVERMORE ET D. MCLAUGHLIN, The behavior of solutions of the NLS equation in the semiclassical limit. *Singular limits of dispersive waves (Lyon, 1991)*, 235-255, *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys.*, 320, Plenum, New York, 1994.
- [93] J.-L. JOLY, G. MÉTIVIER ET J. RAUCH, Diffractive nonlinear geometric optics with rectification. *Indiana Univ. Math. J.* **47**, no. 4 (1998) 1167-1241.
- [94] C. JONES, S. PUTTERMAN ET P. ROBERTS, Motions in a Bose condensate V. Stability of wave solutions of nonlinear Schrödinger equations in two and three dimensions. *J. Phys A : Math. Gen.* **19** (1986), 2991-3011.



- [95] C. JONES ET P. ROBERTS, Motion in a Bose condensate IV. Axisymmetric solitary waves. *J. Phys. A : Math. Gen.*, **15** (1982), 2599-2619.
- [96] B. KADOMTSEV ET V. PETVIASHVILI, On the stability of solitary waves in weakly dispersive media. *Soviet Phys. Dokl.* **15**, 539-541 (1970).
- [97] D. KAUP, The inverse scattering solution for the full three-dimensional three-wave resonant interaction. *Phys. D* **1**, no. 1 (1980), 45-67.
- [98] D. KAUP, A. RIEMAN ET A. BERS, Space-time evolution of nonlinear three-wave interactions. I. Interaction in a homogeneous medium. *Rev. Mod. Phys.* **51**, no. 2 (1979), 275-309.
- [99] C. KENIG, G. PONCE ET L. VEGA, Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg-de Vries equation. *J. Amer. Math. Soc.* **4**, no. 2 (1991), 323-347.
- [100] Y. KIVSHAR, Dark-soliton dynamics and shock-waves induced by the stimulated Raman effect in optical fibers. *Phys. Rev. A* **42** (1990), 1757-1761.
- [101] Y. KIVSHAR, D. ANDERSON ET M. LISAK, Modulational instabilities and dark solitons in a generalized nonlinear Schrödinger-equation. *Phys. Scr.* **47** (1993), 679-681.
- [102] Y. S. KIVSHAR ET B. LUTHER-DAVIES, Dark optical solitons : physics and applications. *Physics Reports* **298** (1998), 81-197.
- [103] Y. KIVSHAR ET D. PELINOVSKY, Self-focusing and transverse instabilities of solitary waves. *Physics Reports* **331** (2000), 117-195.
- [104] Y. KIVSHAR ET W. KROLIKOWSKI, Instabilities of dark solitons. *Optics Letters*, **20**, 14 (1995), 1527-1529.
- [105] Y. KIVSHAR, D. PELINOVSKY ET Y. STEPANYANTS, Self-focusing of plane dark solitons in nonlinear defocusing media. *Phys. Rev. E* **51**, (5) (1995), 5016-5026.
- [106] S. KLAINERMAN ET A. MAJDA, Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids. *Comm. Pure Appl. Math.* **34**, no. 4 (1981), 481-524.
- [107] C. KLEIN, C. SPARBER ET P. MARKOWICH, Numerical study of oscillatory regimes in the Kadomtsev-Petviashvili equation. *J. Nonlinear Sci.* **17**, no. 5 (2007), 429-470.
- [108] V. KLYATSKIN, Emission of sound by a system of vortices. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza* **6** 87, (1966).
- [109] E. B. KOLOMEISKY, T. J. NEWMAN, J. P. STRALEY ET X. QI, Low-Dimensional Bose Liquids : Beyond the Gross-Pitaevskii Approximation. *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000), 1146-1149.
- [110] D. KORTEWEG ET G. DE VRIES, On the change of form of long waves advancing in the rectangular canal and a new type of long stationary waves. *Phil. Magaz.* **39** (1895), 422-443.
- [111] G. KRSTULOVIC, M. BRACHET ET E. TIRAPEGUI, Radiation and vortex dynamics in the nonlinear Schrödinger equation. *Phys. Rev. E* **78** (2008), 026601.
- [112] E. A. KUZNETSOV ET J. JUUL RASMUSSEN, Instability of two-dimensional solitons and vortices in defocusing media. *Phys. Rev. E* **51** (1995), 4479-4484.
- [113] E. KUZNETSOV ET S. TURITSYN, Instability and collapse of solitons in media with a defocusing nonlinearity. *Sov. Phys. JETP* **67** (1988), 1583-1588.
- [114] E. KUZNETSOV ET V. ZHAKAROV, Multi scales expansion in the theory of systems integrable by the inverse scattering transform. *Phys. D.* **18**, (1-3) (1986), 455-463.
- [115] L. LANDAU ET E. LIFSCHITZ, On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies. *Phys. Z. Sowj.* **8** (1935), 153-169.
- [116] D. LANNES, Consistency of the KP approximation. *Dynamical systems and differential equations (Wilmington, NC, 2002). Discrete Contin. Dyn. Syst. (2003)*, 517-525 (suppl.).
- [117] D. LANNES ET J-C. SAUT, Weakly transverse Boussinesq systems and the Kadomtsev-Petviashvili approximation. *Nonlinearity* **19** (2006), 2853-2875.
- [118] P. LAX ET C. LEVERMORE, The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation I/II/III. *Comm. Pure Appl. Math.* **36**, (1983) no. 3, 253-290/no. 5, 571-593/no. 6, 809-829.
- [119] C-C. LEE ET T.C. LIN, Incompressible and compressible limits of two-component Gross-Pitaevskii equations with rotating fields and trap potentials. *J. Math. Phys.* **49**, no. 4 (2008) 043517, 28 pp.

- [120] F. LIN ET P. ZHANG, Semiclassical limit of the Gross-Pitaevskii equation in an exterior domain. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **179** (2006), no. 1, 79-107.
- [121] T-C. LIN ET P. ZHANG, Incompressible and Compressible Limits of Coupled Systems of Nonlinear Schrödinger Equations. *Commun. Math. Phys.* **266** (2006), 547-569.
- [122] Z. LIN, Stability and instability of traveling solitonic bubbles. *Adv. Differential Equations* **7**, no. 8 (2002), 897-918.
- [123] P.-L. LIONS, Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1. Incompressible models. *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*, Oxford University Press, New York (1996).
- [124] P.-L. LIONS, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part I. *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. non linéaire* **1** (1984), 109-145.
- [125] Y. LIU, Strong instability of solitary-wave solutions to a Kadomtsev-Petviashvili equation in three dimensions. *J. Differential Equations*, **180**, no. 1 (2002), 153-170.
- [126] T. MAKINO, S. UKAI ET S. KAWASHIMA, Sur la solution à support compact de l'équations d'Euler compressible. *Japan J. Appl. Math.* **3** (1986), no. 2, 249-257.
- [127] S. MANAKOV, V. ZAKHAROV, L. BORDAG ET V. MATVEEV, Two-dimensional solitons of the Kadomtsev-Petviashvili equation and their interaction. *Phys. Lett. A* **63** (1977), 205-206.
- [128] M. MARIŞ, Traveling waves for nonlinear Schrödinger equations with nonzero conditions at infinity. *Prépublication*.
- [129] M. MARIŞ, On the symmetry of minimizers. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **192**, no 2 (2009), 311-330.
- [130] M. MARIŞ, Nonexistence of supersonic traveling waves for nonlinear Schrödinger equations with nonzero conditions at infinity. *SIAM J. Math. Anal.* **40**, no. 3 (2008), 1076-1103.
- [131] M. MARIŞ, Global branches of travelling-waves to a Gross-Pitaevskii-Schrödinger system in one dimension. *SIAM J. Math. Anal.* **37**, (5) (2006), 1535-1559.
- [132] M. MARIŞ, Existence of nonstationary bubbles in higher dimensions. *J. Math. Pures Appl. (9)* **81**, no. 12 (2002), 1207-1239.
- [133] Y. MARTEL ET F. MERLE, Instability of solitons for the critical generalized Korteweg-de Vries equation. *Geom. Funct. Anal.* **11**, no. 1 (2001), 74-123.
- [134] F. MERLE, Existence of blow-up solutions in the energy space for the critical generalized KdV equation. *J. Amer. Math. Soc.* **14**, no. 3 (2001), 555-578.
- [135] L. MOLINET, J-C. SAUT ET N. TZVETKOV, Well-posedness and ill-posedness results for the Kadomtsev-Petviashvili-I equation. *Duke Math. J.* **115**, no. 2 (2002), 353-384.
- [136] L. MOLINET, J.-C. SAUT ET N. TZVETKOV, Global well-posedness for the KP-I equation. *Math. Ann.* **324**, no. 2 (2002), 255-275.
- [137] C. NORE, M.-E. BRACHET ET S. FAUVE, Numerical study of hydrodynamics using the nonlinear Schrödinger equation. *Physica D : Nonlinear Phenomena* **65**, 1-2 (1993), 154-162.
- [138] Y. OVCHINNIKOV ET I. SIGAL, Symmetry-breaking solutions of the Ginzburg-Landau equation. *J. Exp. Theor. Phys.* **99**, no. 5 (2004), 1090-1107 [translated from *Zh. Eksper. Teoret. Fiz.* **126**, no. 5 (2004), 1249-1266].
- [139] Y. OVCHINNIKOV ET I. SIGAL, The Ginzburg-Landau equation. III. Vortex dynamics. *Nonlinearity* **11**, no. 5 (1998), 1277-1294.
- [140] N. PAPANICOLAOU ET P. SPATHIS, Semitopological solitons in planar ferromagnets. *Nonlinearity* **12**, no. 2 (1999), 285-302.
- [141] D. PELINOVSKY ET Y. STEPANYANTS, New multisoliton solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equations. *JETP Lett.*, **57** (1993), 24-28.
- [142] C-T. PHAM, C. NORE ET M-E. BRACHET, Boundary layers and emitted excitations in nonlinear Schrödinger superflow past a disk. *Phys. D* **210**, no. 3-4 (2005), 203-226.
- [143] L. PISMEN, Vortices in Nonlinear Fields. *Clarendon Press, Oxford*, (1999).
- [144] J. RAUCH, Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity. *Trans. Amer. Math. Soc.* **291** (1985), no. 1, 167-187.

- [145] P. ROBERTS ET N. BERLOFF, Nonlinear Schrödinger equation as a model of superfluid helium. In "Quantized Vortex Dynamics and Superfluid Turbulence" edited by C.F. Barenghi, R.J. Donnelly and W.F. Vinen, *Lecture Notes in Physics*, volume 571, Springer-Verlag, 2001.
- [146] F. ROUSSET ET N. TZVETKOV, Transverse nonlinear instability for two-dimensional dispersive models. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **26**, no. 2 (2009), 477-496.
- [147] F. ROUSSET ET N. TZVETKOV, A simple criterion of transverse linear instability for solitary waves. *Math. Res. Lett.* **17**, no. 1 (2010), 157-169.
- [148] G. SCHNEIDER, Justification and failure of the nonlinear Schrödinger equation in case of non-trivial quadratic resonances. *J. Differential Equations* **216**, no. 2 (2005), 354-386.
- [149] S. SCHOCHET, Asymptotics for symmetric hyperbolic systems with a large parameter. *J. Differential Equations* **75**, no. 1 (1988), 1-27.
- [150] J. SHATAH, Stable standing waves of nonlinear Klein-Gordon equations. *Comm. Math. Phys.* **91**, no. 3 (1983), 313-327.
- [151] J. SHATAH ET W. STRAUSS, Instability of nonlinear bound states. *Comm. Math. Phys.* **100**, no. 2 (1985), 173-190.
- [152] P. SOUGANIDIS ET W. STRAUSS, Instability of a class of dispersive solitary waves. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh A*, **114** (1990), 195-212.
- [153] E. TARQUINI, A lower bound on the energy of travelling waves of fixed speed for the Gross-Pitaevskii equation. *Monatsh. Math.* **151**, no. 4 (2007), 333-339.
- [154] N. TOTZ ET S. WU, A Rigorous Justification of the Modulation Approximation to the 2D Full Water Wave Problem. *Prépublication*.
- [155] T. TSUZUKI, Nonlinear waves in the Pitaevskii-Gross equation. *J. Low Temp. Phys.* **4**, no. 4 (1971), 441-457.
- [156] Z.-Q. WANG ET M. WILLEM, A multiplicity result for the generalized Kadomtsev-Petviashvili equation. *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **7**, no. 2 (1996), 261-270.
- [157] Y. ZHANG, W. BAO ET D. DU, The dynamics and interaction of quantized vortices in the Ginzburg-Landau-Schrödinger equation. *SIAM J. Appl. Math.* **67**, no. 6 (2007), 1740-1775.
- [158] V. ZAKHAROV, Exact solutions to the problem of the parametric interaction of three-dimensional wave packets. *Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R.* **228** (1976), 1314-1316. [Translated in *Soviet Phys. Dokl.* **21** (1976), 322-323].
- [159] V. ZAKHAROV, Instability and nonlinear oscillations of solitons. *JETP Lett.* **22** (1975), 172-173.
- [160] V. ZAKHAROV ET A. KUZNETSOV, Multi-scale expansion in the theory of systems integrable by the inverse scattering transform. *Physica D*, **18** (1-3) (1986), 455-463.
- [161] V. ZAKHAROV ET S. MANAKOV, Resonant interaction of wave packets in nonlinear media. *Zh. Eksp. Tero. Fiz. Pis'ma Red.* **18**, (1973), 413-417. [Translated in *JETP Lett.* **18**, no. 7 (1973), 243-245].
- [162] V. ZAKHAROV ET S. MANAKOV, The theory of resonance interaction of wave packets in nonlinear media. *Zh. Eksp. Teoret. Fiz.* **69**, no. 5 (1975), 1654-1673. [Translated in *Soviet Physics JETP* **42**, no. 5 (1975), 842-850].
- [163] P. ZHANG, Semiclassical limit of nonlinear Schrödinger equation. II. *J. Partial Differential Equations* **15**, no. 2 (2002), 83-96.
- [164] P. ZHIDKOV, Korteweg-de-Vries and Nonlinear Schrödinger Equations : Qualitative Theory. *Lecture Notes in Mathematics 1756*, (2001) Springer-Verlag.
- [165] X. ZHOU, Direct and inverse scattering transforms with arbitrary spectral singularities. *Comm. Pure Appl. Math.* **42** (1989), 895-938.
- [166] X. ZHOU,  $L^2$ -Sobolev space bijectivity of the scattering and inverse scattering transforms. *Comm. Pure Appl. Math.* **51** (1998), 697-731.