История функционального уравнения ζ-функции и роль различных математиков в его доказательстве

Ярослав Благушин

Доктор Центральной Школы (Франция)
Доцент СПбГАСУ (Россия)

Семинар по истории математики — ПОМИ РАН

С.–Петербург, 1 марта 2018

Введение

Дзета-функция

$$\zeta(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + 5^{-s} + \ldots$$

одна из важнейших неэлементарных функций в математике. Её близкие родственники: эта-функция

$$\eta(s) = 1^{-s} - 2^{-s} + 3^{-s} - 4^{-s} + 5^{-s} - \ldots = (1 - 2^{1-s})\,\zeta(s)$$

дзета-функция нечётных чисел

$$\lambda(s) = 1^{-s} + 3^{-s} + 5^{-s} + 7^{-s} + \ldots = (1 - 2^{-s})\,\zeta(s)$$

а также независимые от них трансценденты

$$L(s) = 1^{-s} - 3^{-s} + 5^{-s} - 7^{-s} + 9^{-s} - 11^{-s} + \ldots$$

и

$$\zeta(s, v) = v^{-s} + (1+v)^{-s} + (2+v)^{-s} + (3+v)^{-s} + (4+v)^{-s} + \ldots$$

Тема доклада

Формула отражения для дзета-функции

$$\zeta(1-s) = 2\zeta(s)\Gamma(s)(2\pi)^{-s}\cos\tfrac{1}{2}\pi s\,,$$

также известная как функциональное уравнение дзета-функции, является одним из важнейших результатов в аналитической теории чисел и современном анализе. Как в западной, так и в русскоязычной литературе, это взаимоотношение традиционно приписывается известнейшему немецкому математику Бернарду Риману (Bernhard Riemann), однако он не является ни его автором, ни тем кто его первым строго доказал.

Истории этого уравнения, а также схожих с ним уравнений, и будет и посвящен наш сегодняшний доклад.

Леонард Эйлер (Leonhard Euler)

- 5 Марта 1731 (E020): вычисление $\zeta(2) = \sum n^{-2}$ с точностью в 7 знаков $\zeta(2) = 1,644934$ (чтобы получить такую же точность прямым сложением, нужно просумм. около 15 миллионов членов).
- 5 Декабря 1735 (E041): получение формул для $\zeta(2), \zeta(4), \zeta(6), \ldots$ После 1735 им опубликовано ещё несколько работ с альтернативными методами доказательства тех-же формул.
- 1735—1748: развитие методов суммирования расходящихся рядов, элементарное определение аналитического продолжения.
- 1749/1761/1767 работа „Замечания об одном красивом взаимоотношении между рядами содержащими как прямые, так и обратные степени натуральных чисел" (E352). В ней Эйлер получает тождество

$$\frac{\eta(1-s)}{\eta(s)} = -\frac{(2^s-1)\Gamma(s)}{(2^{s-1}-1)\,\pi^s}\cos\frac{\pi s}{2}$$

полностью эквивалентное формуле отражения ζ-функции.

Как Эйлеру это удалось?

$$1^m - 2^m + 3^m - 4^m + 5^m - 6^m + 7^m - 8^m + \dots \qquad \odot$$

$$\frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \dots \qquad ☽$$

Эйлер пишет: „Моя основная задача состоит в том что бы показать, что несмотря на то что эти ряды имеют совершенно различную природу, их суммы, тем не менее, находятся в удивительно красивом взаимоотношении между собою, таком, что если возможно придать одной из них конкретное значение, то из него можно получить значение другой суммы. Другими словами, я покажу что зная сумму первого ряда для произвольного аргумента m, можно подсчитать сумму второго ряда для аргумента $n = m + 1$."

Как Эйлеру это удалось?

Далее Эйлер вводит понятие аналитического продолжения: „Очевидно, что для рядов первого вида, члены которых всё время возрастают, достаточно трудно сформировать представление об их сумме, ибо под ней обыкновенно понимают то значение к которому тем больше приближаются, чем большее суммируют членов ряда ... у меня уже была оказия заметить что слову *сумма* необходимо придать более широкое толкование и понимать под ним дробь, либо иное аналитическое выражение, которое, будучи разложенным в соответствии с принципами анализа, даст тот самый ряд чью сумму мы ищем. После того как мы установили такое значение для слова *сумма*, становиться понятно что сумма ряда $1-2+3-4+5-6+\ldots$ равняется потому $\frac{1}{4}$, что ряд этот порождён дробью $\frac{1}{(1+1)^2}$, чьё значение, без сомнения, есть $\frac{1}{4}$."

Как Эйлеру это удалось?

Эйлер указывает на полученные им в 1735 году формулы

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\ldots=\frac{2^1-1}{2^1}\,\mathrm{A}\,\pi^2$$

$$1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}-\frac{1}{6^4}+\ldots=\frac{2^3-1}{2^3}\,\mathrm{B}\,\pi^4$$

и т. д., с которыми мы сегодня знакомы в виде

$$\eta(2n)=\left[\,(2^{2n-1}-1)/(2n)!\,\right]\cdot|B_{2n}|\cdot\pi^{2n}$$

где B_{2n} — числа Бернулли. Эйлер даёт коэфф. справа вплоть до 34-ого числа Бернулли, причём все цифры верны. Для наглядности, последнее подсчитанное им число:

$$\mathrm{R}=\frac{151\,628\,697\,551}{12\,130\,454\,581\,433\,748\,587\,292\,890\,625}$$

Как Эйлеру это удалось?

Далее Эйлер пишет: „Однако и суммы рядов первого вида ⊙, при нечётных m, также зависят от чисел A, B, C, D, ..., а их суммы при чётных m, как мы уже видели, равны нулю (т.е. $\zeta(-2n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$). Что бы доказать это, придётся прибегнуть к одному очень особенному методу, который я раньше уже излагал: методу разыскания сумм рядов по общему члену."

После этого, Эйлер получает формулу

$$\frac{1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + 5^{n-1} - 6^{n-1} + \dots}{1 - 2^{-n} + 3^{-n} - 4^{-n} + 5^{-n} - 6^{-n} + \dots} =$$

$$= \frac{-1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)\,(2^n - 1)}{(2^{n-1} - 1)\,\pi} \cdot N$$

Он составляет таблицу для „коэффициента" N и замечает что лучше всего для его роли подходит $\cos\frac{\pi n}{2}$.

Как Эйлеру это удалось?

В конце концов, Эйлер пишет: „По этой причине, я осмелюсь предположить, что каким бы ни был аргумент n, следующее равенство всегда имеет место:

$$\frac{1-2^{n-1}+3^{n-1}-4^{n-1}+5^{n-1}-6^{n-1}+\dots}{1-2^{-n}+3^{-n}-4^{-n}+5^{-n}-6^{-n}+\dots} =$$

$$= \frac{-1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\,(2^n-1)}{(2^{n-1}-1)\,\pi}\cos\frac{\pi n}{2}$$

Это моё предположение может конечно-же показаться слишком смелым, но оно находится в согласии со случаями когда n есть число целое положительное большее единицы, и я докажу, что оно также остаётся верным при $n=1$ и $n=0$. Затем, я покажу, что это предположение является обоснованным и в тех случаях когда n будет просто положительным числом, и более того, что оно будет таковым и в случае отрицательных n. В конце концов, я подробно разберу несколько случаев когда n принимает дробные значения".

Как Эйлеру это удалось?

Причём под $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)$ Эйлер понимает не буквальное произведение, а именно Γ-функцию, что прямо следует из его вычислений. Эйлер проверяет свои результаты для дробных значений с точностью в 4–6 знаков и заключает что нет более никакого сомнения что его тождество верно.

И это ещё не всё!

Эйлер также дифференцирует формулу отражения, получает тождество для $\eta'(n)$, а также значение $\eta'(0) = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}\pi$. В заключении он пишет что получил и подобное уравнение для L-функции

$$\frac{1 - 3^{n-1} + 5^{n-1} - 7^{n-1} + \ldots}{1 - 3^{-n} + 5^{-n} - 7^{-n} + \ldots} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)\, 2^n}{\pi^n} \sin \frac{\pi n}{2}$$

или, что то же, $L(1-n) = L(n)\Gamma(n)\, 2^n \pi^{-n} \sin \frac{\pi n}{2}$, где n любое число, и также изучает её первую производную.

Карл Мальмстен (Carl/Karl Malmsten)

Шведский математик (1814–1886) из г. Упсала. В 26 лет – Доцент, в 28 – Профессор, в 30 – Академик упсальской АН. В 1842 публикует прорывную работу „Новые теоремы об определённых интегралах, суммировании рядов и преобразовании одних в другие", в которой

- строго доказывает 2-ую формулу Эйлера и получает ещё 1 формулу отражения для $M(s) = 1^{-s} - 2^{-s} + 4^{-s} - 5^{-s} + 7^{-s} - 8^{-s} + \ldots$
- вводит обозначение аргумента s для L-рядов, ставшее потом классическим.
- получает ряд Фурье логарифма Γ-функции
- считает ряд очень трудных $\ln\ln$–интегралов

$$\int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}} \cdot \frac{du}{u^s} = \frac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Cos}\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)} \cdot \int_0^1 \frac{dy}{1+2y\operatorname{Cos} a+y^2} \cdot \frac{1}{\left(\operatorname{Log}\frac{1}{y}\right)^{1-s}}.$$

Hinc porro, si $a = \frac{m\pi}{n}$ et $e^{-\frac{\pi u}{n}} = y$ ponitur, unde fit $u = \frac{n}{\pi}\operatorname{Log}\frac{1}{y}$, $du = -\frac{n}{\pi}\frac{dy}{y}$, transformatione facta, eruitur

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{y^{m-1}-y^{-m-1}}{y^n-y^{-n}} \cdot \frac{dy}{\left(\operatorname{Log}\frac{1}{y}\right)^s} = \\ &= \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^{1-s} \cdot \operatorname{Sin}\frac{m\pi}{n}}{\operatorname{Cos}\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)} \cdot \int_0^1 \frac{dy}{1+2y\operatorname{Cos}\frac{m\pi}{n}+y^2} \cdot \frac{1}{\left(\operatorname{Log}\frac{1}{y}\right)^{1-s}} \end{aligned}\right\} \ldots (32)$$

et pro $m = 1$

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{y^{n-2}\,dy}{1+y^2+y^4\ldots+y^{2(n-1)}} \cdot \frac{1}{\left(\mathrm{Log}\frac{1}{y}\right)^s} = \\ &= \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^{1-s} \cdot \mathrm{Sin}\frac{\pi}{n}}{\mathrm{Cos}\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)} \cdot \int_0^1 \frac{dy}{1+2y\,\mathrm{Cos}\frac{\pi}{n}+y^2} \cdot \frac{1}{\left(\mathrm{Log}\frac{1}{y}\right)^{1-s}}.\end{aligned}\right\} \ldots (33)$$

Appellemus

$$G(s) = \int_0^1 \frac{\left(\mathrm{Log}\frac{1}{y}\right)^{s-1}}{1+y+y^2}\,dy,$$

$$\mathfrak{G}(s) = \int_0^1 \frac{\left(\mathrm{Log}\frac{1}{y}\right)^{s-1}}{1+y^2}\,dy.$$

Posito $n = 3$, et mutato y^2 in y, formula (33) dabit

$$G(1-s) = \frac{\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{1-s} \operatorname{Sin}\frac{\pi}{3}}{\operatorname{Cos}\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)}\,G(s), \tag{34}$$

atque ex eâdem pro $n = 2$ immediate colligitur

$$\mathfrak{G}(1-s) = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-s}}{\operatorname{Cos}\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)}\,\mathfrak{G}(s). \tag{35}$$

Ecce simplices et notandæ equationes, quæ funetiones $G(s)$, $\mathfrak{G}(s)$ earumque complementarias $G(1-s)$, $\mathfrak{G}(1-s)$ inter se unde formulæ (34) et (35) has relationes suppeditant

$$\left.\begin{aligned}
&1-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}-\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}-\frac{1}{8^s}+\text{etc.}\\
&=\frac{\operatorname{Cos}\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(1-s)}{\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{1-s}\operatorname{Sin}\frac{\pi}{3}}\left\{1-\frac{1}{2^{1-s}}+\frac{1}{4^{1-s}}-\frac{1}{5^{1-s}}+\frac{1}{7^{1-s}}-\text{etc.}\right\}\\
&1-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}+\frac{1}{9^s}-\frac{1}{11^s}+\text{etc.}\\
&=\frac{\operatorname{Cos}\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(1-s)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-s}}\left\{1-\frac{1}{3^{1-s}}+\frac{1}{5^{1-s}}-\frac{1}{7^{1-s}}+\text{etc.}\right\}
\end{aligned}\right\}\ldots(36)$$

$$\sum_{i=1}^{i=\infty}(-1)^{i-1}\frac{\operatorname{Sin} ia \operatorname{Log} i}{i} = \pi \operatorname{Log}\left\{\frac{\pi^{\frac{1}{2}-\frac{a}{2\pi}}}{(\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{a}{2\pi})}\right\} - \frac{a}{2}(C+\operatorname{Log} 2),$$

unde summam hujusce seriei

$$\frac{\operatorname{Sin} a \operatorname{Log} 1}{1} - \frac{\operatorname{Sin} 2a \operatorname{Log} 2}{2} + \frac{\operatorname{Sin} 3a \operatorname{Log} 3}{3} - \frac{\operatorname{Sin} 4a \operatorname{Log} 4}{4} + \text{etc.}$$

per Γ possumus exprimere.

$$\sum_{i=0}^{i=\infty}(-1)^i\frac{\operatorname{Cos}(i+\frac{1}{2})a\operatorname{Log}(2i+1)}{2i+1}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\operatorname{Log}\left\{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{4\pi}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{a}{4\pi}\right)\right\}+\frac{\pi}{4}\operatorname{Log}\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a+k$$

exsistente k constante arbitraria; quæ ut determinetur, ponamus $a=o$, unde (vid. §. 25 Ex. 1), reductione facta, sequitur

$$k=-\frac{\pi}{4}C-\frac{\pi}{2}\operatorname{Log}2-\frac{3\pi}{4}\operatorname{Log}\pi,$$

ubi C constans illa Euleri est. Substituto hoc ipsius k valore, atque ex formula (6) accipies

$$\int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}} \cdot \frac{(x+u\sqrt{-1})^s+(x-u\sqrt{-1})^s}{(x^2+u^2)^s}\,du = 2\sum_{i=1}^{i=\infty}(-1)^{i-1}\frac{\operatorname{Sin} ia}{(x+i)^s}. \quad (30)$$

Est vero cognita relatio

$$\frac{\operatorname{Sin} a}{1+2y\operatorname{Cos} a+y^2} = \sum_{i=1}^{i=\infty}(-1)^{i-1}y^{i-1}\operatorname{Sin} ia,$$

quæ, si utrimque multiplicetur per $y^x\left(\operatorname{Log}\frac{1}{y}\right)^{s-1}dy$, integratione inter $y=o$ et $y=1$ instituta, dabit

$$\frac{\operatorname{Sin} a}{\Gamma(s)}\int_0^1 \frac{y^x\left(\operatorname{Log}\frac{1}{y}\right)^{s-1}dy}{1+2y\operatorname{Cos} a+y^2} = \sum_{i=1}^{i=\infty}(-1)^{i-1}\frac{\operatorname{Sin} ia}{(x+i)^s},$$

Карл Мальмстен (Carl/Karl Malmsten)

1846 — вторая работа „О некоторых определённых интегралах и рядах" в которой

- получает около 10 функциональных уравнений для различных L-рядов и упоминает вклад Эйлера.
- рассматривает ζ-функцию Гурвица и Лерха, задолго до Гурвица и Лерха, и получает подобные формулы и для них (но не в общем виде).
- рассматривает логарифмические производные функциональных уравнений и 1-ую производную некоторых L-рядов
- получает формулу отражения для 1-ой постоянной Стильтьеса

$$\gamma_1\left(\frac{m}{n}\right)-\gamma_1\left(1-\frac{m}{n}\right)=2\pi\sum_{l=1}^{n-1}\sin\frac{2\pi ml}{n}\cdot\ln\Gamma\left(\frac{l}{n}\right)-\pi(\gamma+\ln 2\pi n)\operatorname{ctg}\frac{m\pi}{n}$$

Все результаты попадают в забвение и приписываются людям которые их получили значительно позже. Мальмстен уходит из математики в конце 50-ых годов и умирает в 1886 году.

$$44.\quad \int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}\cdot\frac{du}{u^s} = \Gamma(1-s)\,.\,\overset{i=n-1}{\underset{i=0}{\mathbf{S}}}\Big[\frac{1}{((2i+1)\pi-a)^{1-s}}-\frac{1}{((2i+1)\pi+a)^{1-s}}\Big].$$

Jam vero, exsistente identico modo

$$44\tfrac{1}{2}.\quad \frac{\operatorname{Sin} a}{1+2y\operatorname{Cos} a+y^2} = \overset{i=n}{\underset{i=1}{\mathbf{S}}}(-1)^{i-1}y^{i-1}\operatorname{Sin} ia + \frac{(-1)^n\,.\,y^n(\operatorname{Sin}(n+1)a+y\operatorname{Sin} na)}{1+2y\operatorname{Cos} a+y^2},$$

habebimus etiam

$$45.\quad \int_0^1 \frac{\operatorname{Sin} a}{1+2y\operatorname{Cos} a+y^2}\cdot\frac{dy}{(\log\frac{1}{y})^{1-s}}$$

$$= \Gamma(s)\,.\,\overset{i=n}{\underset{i=1}{\mathbf{S}}}(-1)^{i-1}\frac{\operatorname{Sin} ia}{i^s} + (-1)^n(W(n)\operatorname{Sin}(n+1)a + W(n+1)\operatorname{Sin} na),$$

ubi brevitatis causa posuimus

$$W(n) = \int_0^1 \frac{y^n(\log\frac{1}{y})^{s-1}dy}{1+2y\operatorname{Cos} a+y^2} = \Theta\,.\int_0^1 y^n(\log\frac{1}{y})^{s-1}dy = \frac{\Theta\,.\,\Gamma(s)}{(n+1)^s},$$

exsistente $1>\Theta>0$. Facile igitur apparet esse

$$\lim W(n) = 0 \qquad [n=\infty]$$

unde ex (45.) obtinebitur

$$46.\quad \int_0^1 \frac{\operatorname{Sin} a}{1+2y\operatorname{Cos} a+y^2}\cdot\frac{dy}{(\log\frac{1}{y})^{1-s}} = \Gamma(s)\,.\,\overset{i=\infty}{\underset{i=1}{\mathbf{S}}}(-1)^{i-1}\,.\,\frac{\operatorname{Sin} ia}{i^s}.$$

Substitutis vero in (29.) valoribus, quos formulae (44. et 46.) praebent, hanc notandam inter duas series infinitas relationem habemus, si s in $1-s$ mutatur:

$$47.\quad \begin{cases} \dfrac{1}{(\pi-a)^s}-\dfrac{1}{(\pi+a)^s}+\dfrac{1}{(3\pi-a)^s}-\dfrac{1}{(3\pi+a)^s}+\dfrac{1}{(5\pi-a)^s}-\dfrac{1}{(5\pi+a)^s}+\text{etc.} \\ =\dfrac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s\pi\,.\,\Gamma(s)}\left\{\dfrac{\operatorname{Sin}a}{1^{1-s}}-\dfrac{\operatorname{Sin}2a}{2^{1-s}}+\dfrac{\operatorname{Sin}3a}{3^{1-s}}-\dfrac{\operatorname{Sin}4a}{4^{1-s}}+\dfrac{\operatorname{Sin}5a}{5^{1-s}}-\text{etc.}\right\} \end{cases}$$

et si $\pi-a$ loco a ponimus:

$$48.\quad \begin{cases} \dfrac{1}{a^s}-\dfrac{1}{(2\pi-a)^s}+\dfrac{1}{(2\pi+a)^s}-\dfrac{1}{(4\pi-a)^s}+\dfrac{1}{(4\pi+a)^s}-\dfrac{1}{(6\pi-a)^s}+\text{etc.} \\ =\dfrac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s\pi\,.\,\Gamma(s)}\left\{\dfrac{\operatorname{Sin}a}{1^{1-s}}+\dfrac{\operatorname{Sin}2a}{2^{1-s}}+\dfrac{\operatorname{Sin}3a}{3^{1-s}}+\dfrac{\operatorname{Sin}4a}{4^{1-s}}+\dfrac{\operatorname{Sin}5a}{5^{1-s}}+\text{etc.}\right\} \end{cases}$$

Hinc si $s=\frac{1}{2}$ facimus fit utique

$$49.\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{(\pi-a)}}-\dfrac{1}{\sqrt{(\pi+a)}}+\dfrac{1}{\sqrt{(3\pi-a)}}-\dfrac{1}{\sqrt{(3\pi+a)}}+\dfrac{1}{\sqrt{(5\pi-a)}}-\dfrac{1}{\sqrt{(5\pi+a)}}+\text{etc.} \\ =\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left\{\dfrac{\operatorname{Sin}a}{\sqrt{1}}-\dfrac{\operatorname{Sin}2a}{\sqrt{2}}+\dfrac{\operatorname{Sin}3a}{\sqrt{3}}-\dfrac{\operatorname{Sin}4a}{\sqrt{4}}+\dfrac{\operatorname{Sin}5a}{\sqrt{5}}-\text{etc.}\right\} \\ \dfrac{1}{\sqrt{a}}-\dfrac{1}{\sqrt{(2\pi-a)}}+\dfrac{1}{\sqrt{(2\pi+a)}}-\dfrac{1}{\sqrt{(4\pi-a)}}+\dfrac{1}{\sqrt{(4\pi+a)}}-\dfrac{1}{\sqrt{(4\pi-6)}}+\text{etc.} \\ =\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left\{\dfrac{\operatorname{Sin}a}{\sqrt{1}}+\dfrac{\operatorname{Sin}2a}{\sqrt{2}}+\dfrac{\operatorname{Sin}3a}{\sqrt{3}}+\dfrac{\operatorname{Sin}4a}{\sqrt{4}}+\dfrac{\operatorname{Sin}5a}{\sqrt{5}}+\text{etc.}\right. \end{cases}$$

Ponamus in (47. et 48.), a esse in ratione commensurabili ad π, i. e. $a=\frac{m\pi}{n}$ ($m<n$ num. integr.); facile tunc obtinebitur

$$52. \quad \frac{1}{1^s}-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}-\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}-\text{etc.}\dots$$
$$=\frac{(\frac{2}{3}\pi)^s.\operatorname{Sin}\frac{1}{3}\pi}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s\pi.\Gamma(s)}\left\{\frac{1}{1^{1-s}}-\frac{1}{2^{1-s}}+\frac{1}{4^{1-s}}-\frac{1}{5^{1-s}}+\frac{1}{7^{1-s}}-\text{etc.}\right\}$$

Formulas (**51.** et **52.**) memini (ni fallor) me vidisse ab *Eulero* alicubi per inductionem inventas, omni demonstratione carentes; neque apud quemquam alium demonstrationem earum invenimus, quamquam formâ suâ attentione Geometrarum digna videantur.

Ex. **3.** Exsistentibus in posteriore formularum (50.) $m=1$, $n=3$, posito brevitatis causa

$$f(s)=\frac{1}{1^s}-\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}-\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}-\frac{1}{17^s}+\frac{1}{19^s}-\text{etc.}$$
$$\varphi(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}-\frac{1}{4^s}-\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{8^s}-\frac{1}{10^s}-\frac{1}{11^s}+\text{etc.}$$

fit utique

$$f(s)=\frac{(\frac{1}{3}\pi)^s.\operatorname{Sin}\frac{1}{3}\pi}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s\pi.\Gamma(s)}.\varphi(1-s).$$

Cum autem sit

$$\varphi(s)=f(s)+2^{-s}\left\{\frac{1}{1^s}-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}-\frac{1}{5^s}+\text{etc.}\right\}$$

atque etiam

$$\varphi(s)=f(s)+2^{-s}f(s)-2^{-2s}\left\{\frac{1}{1^s}-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}-\frac{1}{5^s}+\text{etc.}\right\}$$

unde facile prodit

Ex formulis (**34.** et **35.**) logarithmando obtinebimus

$$\log G(1-s) - \log G(s) = (1-s)\log\tfrac{2}{3}\pi + \log \operatorname{Sin}\tfrac{1}{3}\pi - \log \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}s\pi - \log \Gamma($$

$$\log G_1(1-s) - \log G_1(s) = (1-s)\log\tfrac{1}{2}\pi - \log \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}s\pi - \log \Gamma(s)$$

unde, si brevitatis causa ponimus

$$\textbf{36.}\quad \begin{cases} F(s) = \dfrac{d.\,G(s)}{ds} = \displaystyle\int_0^1 \frac{(\log\frac{1}{y})^{s-1}\log(\log\frac{1}{y})\,dy}{1+y+y^2}, \\[2ex] F_1(s) = \dfrac{d\,G_1(s)}{ds} = \displaystyle\int_0^1 \frac{(\log\frac{1}{y})^{s-1}.\log(\log\frac{1}{y}).dy}{1+y^2}, \end{cases}$$

differentiando habebimus has novas relationes

$$\textbf{37.}\quad \begin{cases} \dfrac{F(s)}{G(s)} + \dfrac{F(1-s)}{G(1-s)} = \log\tfrac{2}{3}\pi + Z'(s) - \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}s\pi, \\[2ex] \dfrac{F_1(s)}{G_1(s)} + \dfrac{F_1(1-s)}{G_1(1-s)} = \log\tfrac{1}{2}\pi + Z'(s) - \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}s\pi, \end{cases}$$

si cum *Legendre* $\dfrac{d.\log\Gamma(s)}{ds}$ per $Z'(s)$ signamus.

$$\psi(s) = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^s \operatorname{Sin}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}s\pi.\Gamma(s)} . F(1-s) - \frac{\tfrac{1}{2}.(\tfrac{1}{2}\pi)^s}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}s\pi.\Gamma(s)} . W(1-s),$$

$$P(s) = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^s \operatorname{Sin}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}s\pi.\Gamma(s)} . F(1-s) + \frac{\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi)^s}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}s\pi.\Gamma(s)} . W(1-s),$$

unde addendo, cum sit

$$\psi(s) + P(s) = F(s),$$

erit

$$54. \qquad F(s) = \frac{2.\left(\frac{\pi}{4}\right)^s \operatorname{Sin}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}s\pi.\Gamma(s)} . F(1-s).$$

§. 6.

Differentiemus jam formulam (44.) respectu s tamquam variabilis; tum erit

$$\int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}} . u^{-s} \log u . du$$

$$= Z'(1-s) . \int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}} . \frac{du}{u^s} - \Gamma(1-s) . \overset{i=\infty}{\underset{i=0}{\mathrm{S}}} \left[\frac{\log((2i+1)\pi-a)}{((2i+1)\pi-a)^{1-s}} - \frac{\log((2i+1)\pi+a)}{((2i+1)\pi+a)^{1-s}}\right],$$

unde pro $s=0$, exsistente

$$Z'(1) = -C \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}} . du = \operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}a,$$

habebimus

fit denique ex formulis (7.) citatis

$$
\text{55.}\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\log(n-m)}{n-m}-\frac{\log(n+m)}{n+m}+\frac{\log(3n-m)}{3n-m}-\frac{\log(3n+m)}{3n+m}+\frac{\log(5n-m)}{5n-m}-\text{etc.}\\
&=-\frac{\pi}{2n}.\mathrm{Tang}\,\frac{m\pi}{2n}(C+\log 2\pi)-\frac{\pi}{n}.\overset{i=n-1}{\underset{i=1}{S}}(-1)^{i-1}\,\mathrm{Sin}\,\frac{im\pi}{n}\log\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{n+i}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{2n}\right)}\right\}\\
&\qquad\qquad(m+n=\text{num. imp.})\\
&\frac{\log(n-m)}{n-m}-\frac{\log(n+m)}{n+m}+\frac{\log(3n-m)}{3n-m}-\frac{\log(3n+m)}{3n+m}+\frac{\log(5n-m)}{5n-m}-\text{etc.}\\
&=-\frac{\pi}{2n}.\mathrm{Tang}\,\frac{m\pi}{2n}(C+\log\pi)-\frac{\pi}{n}.\overset{i=\frac{1}{2}(n-1)}{\underset{i=1}{S}}(-1)^{i-1}\,\mathrm{Sin}\,\frac{im\pi}{n}\log\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{n-i}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{n}\right)}\right\}\\
&\qquad\qquad(m+n=\text{num. par}),
\end{aligned}\right.
$$

atque si $n-m$ loco m ponimus,

$$
\text{56.}\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\log m}{m}-\frac{\log(2n-m)}{2n-m}+\frac{\log(2n+m)}{2n+m}-\frac{\log(4n-m)}{4n-m}+\frac{\log(4n+m)}{4n+m}-\text{etc.}\\
&=-\frac{\pi}{2n}\,\mathrm{Cotang}\,\frac{m\pi}{2n}(C+\log 2\pi)+\frac{\pi}{n}.\overset{i=n-1}{\underset{i=1}{S}}\,\mathrm{Sin}\,\frac{im\pi}{n}\log\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{n+i}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{2n}\right)}\right\}\\
&\qquad\qquad(m=\text{num. imp.})\\
&\frac{\log m}{m}-\frac{\log(2n-m)}{2n-m}+\frac{\log(2n+m)}{2n+m}-\frac{\log(4n-m)}{4n-m}+\frac{\log(4n+m)}{4n+m}-\text{etc.}\\
&=-\frac{\pi}{2n}\,\mathrm{Cotang}\,\frac{m\pi}{2n}(C+\log\pi)+\frac{\pi}{n}.\overset{i=\frac{1}{2}(n-1)}{\underset{i=1}{S}}.\,\mathrm{Sin}\,\frac{im\pi}{n}\log\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{n+i}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{n}\right)}\right\}\\
&\qquad\qquad(m=\text{num. par}).
\end{aligned}\right.
$$

Ex. 1. Posito $n=2$, $m=1$, fit

Вклад Шлёмильха, Кинкелина и других

После работ Мальмстена, задача нахождения функциональных уравнений для распространённых L-рядов сведена до студенческого уровня. Свои решения публикуют или предлагают: Оскар Шлёмильх (Oskar Xavier Schlömilch), Фердинанд Эйзенштейн (Ferdinand Gotthold Max Eisenstein), Томас Клаузен (Thomas Clausen), ...

При этом никто не упоминает Эйлера ...

Uebungsaufgaben für Schüler.

Lehrsatz.

n dem Herrn Professor Dr. Schlömilch an der Universität zu Jena.

Die unendliche Reihe

$$\frac{1}{1^s}-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}+\dots$$

onvergirt bekanntlich für jedes positive von Null verschiedene s. ennen wir $f(s)$ ihre Summe, so findet zwischen den Summen (s) und $f(1-s)$ die bemerkenswerthe Relation

$$\frac{f(1-s)}{f(s)}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^s \Gamma(s)\sin\frac{s\pi}{2}$$

tatt, wobei s als positiver ächter Bruch vorausgesetzt wird. Für $=\frac{1}{2}$ wird $f(s)=f(1-s)$ und man hat dann

$$1=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\text{ oder }\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},$$

ie man ausserdem schon weiss.

Герман Кинкелин (Hermann Kinkelin)

Швейцарский математик из Берна, Герман Кинкелин (1832–1913) в 1858 году, 6 Ноября, представляет свою работу „О некоторых бесконечных рядах", где получает другим способом практически такие-же обширные результаты как и Мальмстен. В частности, он получает и функциональные уравнение для дзета и эта функций.

Прим.: в 1859 доказательство того-же результата публикуется и Риманом, который в дальнейшем по странному стечению обстоятельств и будет считаться его автором.

Nr. 419 und 420.

(NB. Auf pag. 57 lese man Nr. 415 und 416, statt blos Nr. 415).

Hermann Kinkelin.

Ueber einige unendliche Reihen.

(Vorgetragen den 6. November 1858.)

I.

Bekanntlich convergirt die Reihe

$$1) \qquad \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots \text{in inf.},$$

wo s eine positive Zahl bedeutet, nur dann, wenn $s > 1$ ist; sonst aber ist sie divergent. Man kann sich nun die Aufgabe stellen, ihren Grenzwerth anzugeben für $s \overline{\gtrless} 1$, wenn sie blos bis zu einem gewissen Glied $\frac{1}{k^s}$, wobei k in's Unendliche wachsend gedacht ist, fortgeführt wird. Um zu diesem Ziele zu gelangen, diene die Formel für die angenäherte Berechnung bestimmter Integrale (Raabe Integralrechnung Bd. I. Nr. 233).

$$-\frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\operatorname{Cos}\frac{s\pi}{2}\left\{\frac{\operatorname{Sin}2\pi x}{1^{1-s}}+\frac{\operatorname{Sin}4\pi x}{2^{1-s}}+\frac{\operatorname{Sin}6\pi x}{3^{1-s}}+\cdots\right\}$$

und durch Umsetzen von x in $1-x$

$$\sigma(1-x,s)=c_s$$

$$-\frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\operatorname{Sin}\frac{s\pi}{2}\left\{\frac{\operatorname{Cos}2\pi x}{1^{1-s}}+\frac{\operatorname{Cos}4\pi x}{2^{1-s}}+\frac{\operatorname{Cos}6\pi x}{3^{1-s}}+\cdots\right\}$$

$$+\frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\operatorname{Cos}\frac{s\pi}{2}\left\{\frac{\operatorname{Sin}2\pi x}{1^{1-s}}+\frac{\operatorname{Sin}4\pi x}{2^{1-s}}+\frac{\operatorname{Sin}6\pi x}{3^{1-s}}+\cdots\right\}$$

Diese mit 33) durch Addition und Subtraction verbunden, giebt

$$34)\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\operatorname{Cos}2\pi x}{1^{1-s}}+\dfrac{\operatorname{Cos}4\pi x}{2^{1-s}}+\cdots=-\dfrac{\sigma(x,s)+\sigma(1-x,s)-2c_s}{4\Gamma(1-s)\operatorname{Sin}\frac{s\pi}{2}}(2\pi)^{1-s}\\[2em] \dfrac{\operatorname{Sin}2\pi x}{1^{1-s}}+\dfrac{\operatorname{Sin}4\pi x}{2^{1-s}}+\cdots=-\dfrac{\sigma(x,s)-\sigma(1-x,s)}{4\Gamma(1-s)\operatorname{Cos}\frac{s\pi}{2}}(2\pi)^{1-s}\end{array}\right.$$

oder mit Zuziehung von 7) und 20)

$$(2-2^s)c_s + \frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\operatorname{Sin}\frac{s\pi}{2}(1-2^s)c_{1-s}.$$

oder

$$\frac{c_s}{c_{1-s}} = \frac{2\Gamma(1-s)\operatorname{Sin}\frac{s\pi}{2}}{(2\pi)^{1-s}}$$

oder auch

$$35)\qquad \frac{c_s}{c_{1-s}} = \frac{(2\pi)^s}{2\Gamma(s)\operatorname{Cos}\frac{s\pi}{2}},$$

oder mit Zuziehung von 7)

$$36)\ \mathrm{N.}\qquad \frac{1-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{4^s}+\cdots}{1-\frac{1}{2^{1-s}}+\frac{1}{3^{1-s}}-\frac{1}{4^{1-s}}+\cdots} = \frac{2-2^s}{2^s-1}\cdot\frac{\pi^s}{2\Gamma(s)\operatorname{Cos}\frac{s\pi}{2}}$$

Eine andere ähnliche, schon von Schlömilch angegebene Relation kann aus 34) unter der Annahme, dass $x=\frac{1}{4}$, gewonnen werden. Es wird nämlich alsdann

Адольф Гурвиц (Adolf Hurwitz)

Немецкий математик из Хильдесхайма, Адольф Гурвиц (1859–1919) в 1881 обобщает предыдущие результаты и получает функциональное уравнение

$$\zeta\left(1-a,\frac{r}{m}\right)=\frac{2\Gamma(a)}{(2\pi m)^a}\sum_{l=1}^{m}\cos\left(\frac{2\pi rl}{m}-\frac{\pi a}{2}\right)\cdot\zeta\left(a,\frac{l}{m}\right),$$

$r=1,2,\ldots,m$, формула, которая практически прямо следует из результатов Мальмстена 1846 года.

Заслуги Мальмстена позже будут частично восстановлены Лерхом, Харди, Дуткой и Вашим покорным слугой.

Благодарю за внимание!

Доклад подготовлен по мотивам двух статей автора

- Ia. V. Blagouchine, Rediscovery of Malmsten's integrals, their evaluation by contour integration methods and some related results, *Ramanujan J.*, **35** (2014), 21–110. Addendum: **42** (2017), 777–781.
- Ia. V. Blagouchine, A theorem for the closed-form evaluation of the first generalized Stieltjes constant at rational arguments and some related summations, *J. Number Theory*, **148** (2015), 537–592. Erratum: **151** (2015), 276–277.

Вторая работа касается только статьи Мальмстена 1846, в той её части что затрагивает результаты Мальмстена для ζ-функции Гурвица и Лерха, для их 1-ой производной и для формулы отражения 1-ой постоянной Стилтьеса γ_1.

Если Вы желаете оставить какой-нибудь отзыв автору, то с ним можно связаться

iaroslav.blagouchine@univ-tln.fr

iaroslav.blagouchine@pdmi.ras.ru

https://iBlagouchine.perso.centrale-marseille.fr/