Extrait de quelques lettres de M. Ch. Hermite à M. S. Píncherle.

Paris, le 10 Mai 1900.

. . . mon travail touche de près au vôtre, puisqu'il concerne la relation:

$$f(a+x)=f(a)+\frac{x}{1}\,\Delta f(a)+\frac{x\,(x-1)}{1\,.\,2}\,\Delta^2 f(a)+\cdots$$

dans les cas où elle a lieu, et où je suppose $\Delta a=1$. Elle donne le type de ces fonctions qui sont complétement définies par les seules valeurs entières de la variable et vous remarquerez son caractère essentiel de conserver la même forme, lorsqu'on prend soit les dérivées, soit les différences finies, par rapport à a, de sorte qu'une seule égalité donne naissance à une infinité d'autres. Voici celle que j'ai obtenue; elle se rapporte à la fonction Gamma et fournit une expression de son logarithme, d'une toute autre nature que la formule classique:

$$\log\Gamma(1+x)=-\,C\,x+\frac{S_2\,x^2}{2}-\frac{S_3\,x^3}{3}+\cdots$$

qui suppose le module de la variable inférieur à l'unité, et où les coefficients $S_n=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots$ sont des trascendantes numériques. La méthode, comme vous allez voir, est on ne peut plus facile; elle a son point de départ dans la formule:

$$\log\Gamma(x)=\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{xy}-e^y}{e^y-1}-(x-1)\,e^y\right]\frac{d\,y}{y}\,.$$

J'en tire d'abord la relation

$$\log\Gamma(a+x)-\log\Gamma(a)=\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{ay}\,(e^{xy}-1)}{e^y-1}-x\,e^y\right]\frac{d\,y}{y}\,,$$

et je remarquerai que pour $x = 1$ on a:

$$\Delta \log \Gamma(a) = \int_{-\infty}^{0} (e^{ay} - e^{y}) \frac{dy}{y},$$

puis par un calcul facile:

$$\Delta^{n} \log \Gamma(a) = \int_{-\infty}^{0} e^{ay} (e^{y} - 1)^{n-1} \frac{dy}{y},$$

en prenant:

$$\Delta a = 1.$$

Cela étant, j'écris:

$$e^{xy} = [1 + (e^{y} - 1)]^{x} = 1 + \frac{x}{1}(e^{y} - 1) + \frac{x(x-1)}{1 \,.\, 2}(e^{y} - 1)^{2} + \cdots,$$

série convergente, la quantité $1 - e^{y}$ étant moindre que l'unité, puisque la variable est toujours négative dans l'intégrale. Nous avons ainsi:

$$\frac{e^{xy} - 1}{e^{y} - 1} = x + \frac{x(x-1)}{1 \,.\, 2}(e^{y} - 1) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1 \,.\, 2 \ldots n}(e^{y} - 1)^{n-1} + \cdots$$

et par conséquent:

$$\log \Gamma(a + x) - \log \Gamma(a) = x \int_{-\infty}^{0} (e^{ay} - e^{y}) \frac{dy}{y} +$$

$$+ \frac{x(x-1)}{1 \,.\, 2} \int_{-\infty}^{0} e^{ay} (e^{y} - 1) \frac{dy}{y} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1 \,.\, 2 \ldots n} \int_{-\infty}^{0} e^{ay} (e^{y} - 1)^{n-1} \frac{dy}{y} + \cdots$$

et enfin, d'après la remarque précédente:

$$\log \Gamma(a + x) - \log \Gamma(a) = x \,\Delta \log \Gamma(a) + \frac{x(x-1)}{1 \,.\, 2} \Delta^{2} \log \Gamma(a) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1 \,.\, 2 \ldots n} \Delta^{n} \log \Gamma(a) + \cdots$$

ou bien :

$$\log \Gamma(a+x) - \log \Gamma(a) = x \log a + \frac{x(x-1)}{1 \,.\, 2} \Delta \log a + \cdots$$

$$\cdots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1 \,.\, 2 \ldots n} \Delta^{n-1} \log a + \cdots$$

Il est clair que a doit être supposé positif pour que les intégrales aient un sens; cette condition admise, la convergence est démontrée comme conséquence de la formule du binôme pour toutes les valeurs positives de x. Vous voyez qu'en faisant $a = 1$ afin d'obtenir $\log \Gamma(1+x)$, le calcul des coefficients se fait bien aisément et par de simples soustractions avec une table de logarithmes. Sous forme explicite, on peut écrire :

$$\log \Gamma(1+x) = \frac{x(x-1)}{1 \,.\, 2} \log 2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} (\log 3 - 2 \log 2) +$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} (\log 4 - 3 \log 3 + 3 \log 2) + \cdots$$

et j'observe surtout qu'ils sont tous de même nature, tandis que les quantités S_n s'expriment par les puissances de π si n est pair et représentent pour n impair des transcendantes plus complexes. Je n'écris pas les égalités semblables qu'on obtient en prenant les dérivées par rapport à a; je remarque seulement que la différence finie donne :

$$\log(a+x) = \log a + \frac{x}{1} \Delta \log a + \frac{x(x-1)}{1 \,.\, 2} \Delta^2 \log a + \cdots$$

et, qu'en prenant les dérivées, on obtient les éléments simples des fonctions uniformes d'une variable. Mais leur expression par la formule d'interpolation, à la quelle on serait ainsi amené, n'a lieu qu'en supposant la variable positive et sous la restriction que les pôles soient représentés par des quantités réelles négatives, ou par des imaginaires ayant leur partie réelle négative; c'est-à-dire que les pôles se trouvent tous dans le demi plan, à gauche de l'axe des ordonnées.

Paris, 19 Mai 1900.

. . . Voici une généralisation qui va faire disparaître, s'il existe, tout le prestige du cas particulier de $\log \Gamma(x)$. Je considère, avec LAPLACE et ABEL, les fonctions définies par l'égalité suivante:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(y)\, e^{xy}\, dy, \tag{1}$$

et je remarque qu'on en tire:

$$\Phi(a+x) - \Phi(a) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(y)\, (e^{xy} - 1)\, e^{ay}\, dy,$$

ce qui donne, pour $x = 1$,

$$\Delta\, \Phi(a) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(y)\, (e^{y} - 1)\, e^{ay}\, dy, \tag{2}$$

puis:

$$\Delta^n\, \Phi(a) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(y)\, (e^{y} - 1)^n\, e^{ay}\, dy. \tag{3}$$

J'admettrai que la première relation ait lieu pour toutes les valeurs positives de x; il en sera de même de celles qui suivent sous la condition de $a > 0$. Cela étant, on aura cette expression par la formule d'interpolation de NEWTON:

$$\Phi(a+x) = \Phi(a) + \frac{x}{1}\,\Delta\,\Phi(a) + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}\,\Delta^2\,\Phi(a) + \cdots$$

Elle s'établit, en effet, en partant encore de l'identité:

$$e^{xy} = (1 + e^y - 1)^x,$$

et de la série convergente qui en résulte:

$$e^{xy} = 1 + \frac{x}{1}(e^y - 1) + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}(e^y - 1)^2 + \cdots \tag{4}$$

si l'on suppose x positif et y négatif, en sorte que $e^y - 1$ soit en valeur absolue inférieur à l'unité. Nous pouvons ainsi l'employer dans l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{0} \varphi(y)(e^{xy}-1)\,e^{ay}\,dy,$$

et au moyen des égalités (2) et (3) en conclure sur le champ le résultat annoncé.

Une conclusion semblable a lieu si l'on considère la fonction :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{0} [\varphi(y)\,e^{xy} + \varphi_1(y)]\,dy,$$

car on a comme tout à l'heure :

$$\Phi(a+x) - \Phi(a) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(y)(e^{xy}-1)\,e^{ay}\,dy.$$

Soit encore :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{0} [\varphi(y)\,e^{xy} + x\,\varphi_1(y) + \varphi_2(y)]\,dy\,;$$

nous trouverons dans ce cas :

$$\Phi(a+x) - \Phi(a) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(y)\,[(e^{xy}-1)\,e^{ay} + x\,\varphi_1(y)]\,dy.$$

Il vient par suite :

$$\Delta\,\Phi(a) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(y)\,[(e^{y}-1)\,e^{ay} + \varphi_1(y)]\,dy,$$

puis à partie de $n = 2$:

$$\Delta^n\,\Phi(a) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(y)(e^{y}-1)^n\,e^{ay}\,dy.$$

Cela étant, l'emploi de la série (4) donne de nouveau :

$$\Phi(a+x) = \Phi(a) + \frac{x}{1}\,\Delta\,\Phi(a) + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}\,\Delta^2\,\Phi(a) + \cdots$$

Cette formule s'applique au terme complémentaire $J(x)$ de la série de

Stirling, dans la relation :

$$\log \Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x - x + \log \sqrt{2\pi} + J(x),$$

puisqu'on a :

$$J(x) = \int_{-\infty}^{0} e^{xy} \frac{e^y(y-2)+y+2}{2y^2(e^y-1)}\, dy.$$

Mais alors s'introduisent les différences successives de la quantité,

$$J(a+1) - J(a) = \left(a + \frac{1}{2}\right)\log(a+1) - \left(a - \frac{1}{2}\right)\log a.$$

On peut aussi l'employer pour $\log \Gamma(x)$, d'après la formule :

$$\log \Gamma(x) = \int_{-\infty}^{0} \left[\frac{e^{xy} - e^y}{e^y - 1} - (x-1)e^y\right]\frac{dy}{y},$$

et retrouver l'expression plus simple à la quelle j'étais parvenu, où entrent seulement les différences de $\log a$.

S.t Jean-de-Luz, 8 Juin 1900.

. . . J'ajouterai une remarque concernant la fonction $\Phi(x)$, définie en posant :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{0} [e^{xy}\varphi(y) + x\varphi_1(y) + \varphi_2(y)]\, dy,$$

et pour laquelle on a la relation :

$$\Phi(a+x) = \Phi(a) + \frac{x}{1}\Delta\Phi(a) + \frac{x(x-1)}{1.2}\Delta^2\Phi(a) + \cdots$$

Je pose :

$$\mathfrak{J} = \int_0^1 \Phi(a+x)\, dx,$$

ce qui sera l'intégrale de Raabe généralisée, et j'établis que pour a très grand, la valeur asymptotique de $\Phi(a)$ est donnée par l'expression $\mathfrak{J} - \frac{1}{2}\Delta\Phi(a)$.

Soit à cet effet, $\Phi(a) = \mathfrak{J} - \frac{1}{2}\Delta\Phi(a) + \mathfrak{J}(a)$; les égalités suivantes:

$$\int_0^1 \Phi(a+x)\,dx = \int_{-\infty}^0 \left[e^{ay}\varphi(y)\frac{e^y-1}{y} + \left(a+\frac{1}{2}\right)\varphi_1(y) + \varphi_2(y)\right] dy\,,$$

$$\Phi(a) = \int_{-\infty}^0 [e^{ay}\varphi(y) + a\varphi_1(y) + \varphi_2(y)]\,dy\,,$$

$$\Delta\Phi(a) = \int_{-\infty}^0 [e^{ay}\varphi(y)(e^y-1) + \varphi_1(y)]\,dy\,,$$

conduisent, pour ce terme complémentaire $\mathfrak{J}(a)$, à la formule:

$$\mathfrak{J}(a) = \int_{-\infty}^0 e^{ay}\varphi(y)\frac{e^y(y+2)+y-2}{2y}\,dy.$$

La variable y étant négative dans le champ de l'intégration, vous voyez que $\mathfrak{J}(a)$ s'annule en supposant a infini; ce qui démontre la proposition énoncée, si connue dans le cas de $\Phi(a) = \log\Gamma(a)$.

Je dois à M. Lerch, la remarque importante que si l'on intègre entre les limites $x=0$ et $x=1$ les deux membres de l'égalité dont je lui avais donné communication:

$$\log\Gamma(a+x) = \log\Gamma(a) + \frac{x}{1}\log a + \frac{x(x-1)}{1.2}\Delta\log a + \cdots$$

et qu'on pose:

$$\alpha_n = \int_0^1 \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1.2\ldots n}\,dx\,,$$

on en tire, en remarquant que $\alpha_1 = \frac{1}{2}$:

$$\log\Gamma(a) = J - \frac{1}{2}\log a - \alpha_2\Delta\log a - \alpha_3\Delta^2\log a - \cdots$$

Ce résultat est fort remarquable; il met en évidence la valeur asymptotique de $\log\Gamma(a)$ représentée par la quantité:

$$J - \frac{1}{2}\log a = \left(a-\frac{1}{2}\right)\log a - a + \log\sqrt{2\pi},$$

et le terme complementaire $J(a) = -\alpha_3 \Delta \log a - \alpha_3 \Delta^2 \log a - \cdots$, s'exprime par les différences de $\log a$, au lieu des différences de

$$\left(a+\frac{1}{2}\right)\log(a+1)-\left(a-\frac{1}{2}\right)\log a,$$

aux quelles j'avais été amené.

Il ouvre de plus, m'a écrit l'éminent géomètre, la voie pour obtenir la composition des nombres de Bernouilli avec les quantités α_n.

Mais j'ai cherché autre chose, je suis revenu à la fonction plus générale :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{0} [e^{xy} \varphi(y) + x \varphi_1(y) + \varphi_2(y)]\, dy,$$

et à la relation,

$$\Phi(a) = \mathfrak{J} - \frac{1}{2} \Delta \Phi(a) + \mathfrak{J}(a).$$

En écrivant le terme complémentaire de cette manière :

$$\mathfrak{J}(a) = \int_{-\infty}^{0} e^{ay} \varphi(y) \left[\frac{e^y - 1}{2} - \left(\frac{e^y - 1}{y} - 1\right)\right] dy,$$

j'ai recours à la série suivante :

$$\frac{z}{\log(1+z)} = 1 + \omega_1 z + \omega_2 z^2 + \cdots$$

qui est convergente lorsqu'on suppose le module de z inférieur à l'unité. Soit $1 + z = e^y$, on en tire l'égalité :

$$\frac{e^y - 1}{y} - 1 = \omega_1 (e^y - 1) + \omega_2 (e^y - 1)^2 + \cdots,$$

valable par conséquent pour y négatif; en remarquant que le coefficient ω_1 est égal à $\frac{1}{2}$, il vient ensuite :

$$\frac{e^y - 1}{2} - \left(\frac{e^y - 1}{y} - 1\right) = -\omega_2 (e^y - 1)^2 - \omega_3 (e^y - 1)^3 - \cdots$$

et l'on en conclut :

$$\mathfrak{J}(a) = -\Sigma \omega_n \int_{-\infty}^{0} e^{ay} (e^y - 1)^n \varphi(y)\, dy.$$

Il faut prendre dans la somme du second membre $n = 2, 3, \ldots$ en excluant la valeur $n = 1$, nous avons donc:

$$\mathfrak{Z}(a) = -\omega_2 \Delta^2 \Phi(a) - \omega_3 \Delta^3 \Phi(a) \ldots$$
$$= \frac{\Delta^2 \Phi(a)}{12} - \frac{\Delta^3 \Phi(a)}{24} + \frac{19\, \Delta^4 \Phi(a)}{720} - \frac{3\, \Delta^5 \Phi(a)}{160} + \cdots$$

Cette formule généralise la relation de M.r Lerch, elle a lieu pour toutes les valeurs positives de a et j'observerai que les coefficients ω_n se ramènent à α_n, au moyen de l'égalité:

$$\int_0^1 (1+z)^x\, d\, x = \frac{z}{\log(1+z)},$$

en développant les deux membres suivant les puissances de z.

Je sors ainsi de la question d'interpolation que j'avais en vue, mais en restant dans le domaine des séries où entrent les différences finies d'une même fonction. Bientôt j'y reviendrai . . .

S.t Jean-de-Luz, 10 Août 1900.

Je viens vous mentionner une application de la formule d'interpolation à la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, ou même à l'expression plus générale qui a été l'objet des beaux travaux de M.r Lerch et de M.r Mellin, à savoir:

$$R(a, s) = \frac{1}{a^s} + \frac{1}{(a+1)^s} + \frac{1}{(a+2)^s} + \cdots$$

On a, comme vous savez:

$$R(a, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{e^{-ax}\, x^{s-1}\, d\, x}{1 - e^{-x}},$$

mais il existe une autre formule dont je fais usage, et que je tire de la relation donnée par Abel:

$$f(a) + f(a+1) + \cdots = \int_a^\infty f(x)\, d\, x + \frac{1}{2} f(a) + \int_0^\infty \frac{f(a - i\, x) - f(a + i\, x)}{i\,(e^{2\pi x} - 1)}\, d\, x.$$

Soit $f(x) = \frac{1}{x^s}$: on en conclût l'expression suivante, qui est d'une grande importance :

$$R(a, s) = \frac{1}{(s-1)\, a^{s-1}} + \frac{1}{2\, a^s} + \int_0^\infty \frac{(a - i\, x)^{-s} - (a + i\, x)^{-s}}{i\, (e^{2\pi x} - 1)}\, d\, x. \qquad (1)$$

Elle conduit, en effet, à l'extension à tout le plan de la série qui n'a d'existence qu'autant que la variable s est supérieure à l'unité. Elle montre que cette série donne naissance à une fonction uniforme, si l'on convient de prendre dans l'intégrale, pour toute valeur de s, ce que l'on nomme la determination principale des puissances $(a - i\, x)^{-s}$ et $(a + i\, x)^{-s}$. Elle fait voir encore que cette fonction uniforme a un seul pôle $s = 1$ provenant du terme $\frac{1}{(s-1)\, a^{s-1}}$; le développement en série :

$$\frac{1}{(s-1)\, a^{s-1}} = \frac{1}{s-1} - \log a + \frac{s-1}{2} \log^2 a \ldots$$

suffit ensuite pour établir que la difference $R(a, s) - \frac{1}{s-1}$ est une fonction holomorphe. J'observerai en dernier lieu qu'ayant :

$$\frac{1}{e^{2\pi x} - 1} = \frac{1}{2\pi} D_x \log(1 - e^{-2\pi x}),$$

on peut écrire au moyen d'une intégration par parties :

$$\int_0^\infty \frac{(a - i\, x)^{-s} - (a + i\, x)^{-s}}{i\, (e^{2\pi x} - 1)}\, d\, x =$$

$$= - \frac{s}{2\pi} \int_0^\infty [(a - i\, x)^{-s-1} + (a + i\, x)^{-s-1}] \log(1 - e^{-2\pi x})\, d\, x,$$

et conclure de cette nouvelle expression,

$$R(a, s) = \frac{1}{(s-1)\, a^{s-1}} + \frac{1}{2\, a^s} -$$

$$- \frac{s}{2\pi} \int_0^\infty [(a - i\, x)^{-s-1} - (a + i\, x)^{-s-1}] \log(1 - e^{-2\pi x})\, d\, x,$$

les deux premiers termes, trouvés par M. Lerch, du développement de $R(a, s)$ suivant les puissances croissantes de s. Nous avons en effet:

$$\frac{1}{(s-1)\,a^{s-1}} + \frac{1}{2\,a^s} = \frac{1}{2} - a + s\left[\left(a - \frac{1}{2}\right)\log a - a\right] + \cdots$$

en négligeant le carré et les puissances supérieures.

Remarquant ensuite que l'intégrale:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty [(a - ix)^{-1} + (a + ix)^{-1}]\log(1 - e^{-2\pi x})\,dx,$$

revient à la suivante,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{a\log(1 - e^{-2\pi x})}{a^2 + x^2}\,dx,$$

qui est précisément le terme complémentaire changé de signe de la série de Stirling, nous avons l'égalité:

$$R(a, s) = \frac{1}{2} - a + s\left[\left(a - \frac{1}{2}\right)\log a - a\right] -$$
$$+ s\left[\log\Gamma(a) - \left(a - \frac{1}{2}\right)\log a - a - \log\sqrt{2\pi}\right],$$

et en réduisant:

$$R(a, s) = \frac{1}{2} - a + s\left[\log\Gamma(a) - \log\sqrt{2\pi}\right].$$

A ce résultat il convient de joindre celui qu'on tire de la formule:

$$R(a, s + 1) = -\frac{1}{s} D_a R(a, s),$$

en différentiant la relation précédente par rapport à a. Nous obtenons ainsi:

$$R(a, s + 1) = \frac{1}{s} - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)},$$

ou bien en changeant s en $s - 1$, et par conséquent pour des valeurs de la variable voisines de l'unité:

$$R(a, s) = \frac{1}{s-1} - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)},$$

comme l'a encore trouvé M.r Lerch.

Après ces remarques, j'arrive à la conséquence à tirer de l'équation (1) relativement à la formule d'interpolation. Elle découle de la transformée de l'integrale :

$$\int_0^\infty \frac{(1-ix)^{-s}-(1+ix)^{-s}}{i\,(e^{2\pi x}-1)}\,dx,$$

qui s'obtient en faisant $x = a \operatorname{tang} \varphi$, et au moyen des égalités :

$$1+i \operatorname{tang} \varphi = \frac{2}{1+e^{-2i\varphi}},$$

$$1-i \operatorname{tang} \varphi = \frac{2}{1+e^{2i\varphi}}.$$

Cette transformée est en effet :

$$\frac{1}{2^s a^{s-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+e^{2i\varphi})^s-(1+e^{-2i\varphi})^s}{i\,(e^{2\pi a \operatorname{tg}\varphi}-1)}\,d\varphi,$$

de sorte qu'en faisant pour abréger :

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2n\varphi \,.\, d\varphi}{\cos^2\varphi\,(e^{2\pi a \operatorname{tg}\varphi}-1)},$$

on est amené à la relation suivante :

$$R(a,s) = \frac{1}{(s-1)\,a^{s-1}} + \frac{1}{2\,a^s} + \frac{1}{2^{s-1}\,a^{s-1}}\left[\frac{s}{1}\,J_1 + \frac{s\,(s-1)}{1\,.\,2}\,J_2 + \cdots\right]. \qquad (2)$$

C'est l'expression par la formule d'interpolation que j'avais en vue d'obtenir, mais elle suppose essentiellement la convergence du développement de $(1+e^{2i\varphi})^s$, et n'est démontrée que pour des valeurs positives de la variable.

Permettez moi encore une remarque sur cette question difficile autant qu'importante de la représentation analytique de la fonction $R(a,s)$.

Revenant à la formule :

$$R(a,s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{e^{-ax}\,x^{s-1}\,dx}{1-e^{-x}},$$

j'en tire, en y joignant les égalités:

$$\frac{1}{(s-1)\,a^{s-1}} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-ax}\, x^{s-2}\, d\,x\,,$$

$$\frac{1}{a^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-ax}\, x^{s-1}\, d\,x\,,$$

la relation suivante:

$$R\,(a,\,s) - \frac{1}{(s-1)\,a^{s-1}} - \frac{1}{2\,a^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-ax}\, x^{s-1} \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) d\,x.$$

Cela étant, j'emploie en y changeant x en $-x$, la série dont j'ai déja fait usage elle devient ainsi,

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \omega_1\,(e^{-x}-1) + \cdots + \omega_n\,(e^{-x}-1)^n + \cdots$$

et au moyen de l'égalité:

$$\Delta^n\,\frac{1}{a^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-ax}\,(e^{-x}-1)^n\, x^{s-1}\, d\,x\,,$$

j'en conclus immédiatement le nouveau développement:

$$R\,(a,\,s) = \frac{1}{(s-1)\,a^{s-1}} + \frac{1}{2\,a^s} + \omega_1\,\Delta\,\frac{1}{a^s} + \omega_2\,\Delta^2\,\frac{1}{a^s} + \cdots$$

$$= \frac{1}{(s-1)\,a^{s-1}} + \frac{1}{2\,a^s} + \frac{1}{2}\,\Delta\,\frac{1}{a^s} - \frac{1}{12}\,\Delta^2\frac{1}{a^s} + \frac{1}{24}\,\Delta^3\,\frac{1}{a^s} - \frac{19}{720}$$

$$\Delta^4\,\frac{1}{a^s} + \frac{3}{160}\,\Delta^5\,\frac{1}{a^s} - \cdots$$

24 Août 1900.

Je viens de remarquer qu'une généralisation bien facile de l'intégrale:

$$\int_0^\infty \frac{(a-i\,x)^{-s} - (a+i\,x)^{-s}}{i\,(e^{2\pi x}-1)}\, d\,x,$$

conduit encore à une application de la formule d'interpolation de Newton.

Ne m'étant pas servi, en effet, de la forme particulière de la quantité $\frac{1}{e^{2\pi x}-1}$, il est clair qu'on peut traiter de même l'expression :

$$\int_0^\infty \theta(x)\,[(a-ix)^{-s}-(a+ix)^{-s}]\,dx.$$

Mais afin de ne pas complètement me répéter, je poserai :

$$\Theta(s)=\int_0^\infty \theta(x)\,(a+ix)^{-s}\,dx,$$

et la substitution $x=a\operatorname{tg}\varphi$ donnera :

$$\Theta(s)=\frac{1}{2^s a^{s-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\theta(a\operatorname{tang}\varphi)\,(1+e^{-2i\varphi})^s}{\cos^2\varphi}\,d\varphi,$$

cela étant si l'on écrit :

$$J_n=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\theta(a\operatorname{tang}\varphi)\,e^{-2ni\varphi}}{\cos^2\varphi}\,d\varphi,$$

nous avons l'égalité :

$$(2a)^s\,\Theta(s)=J_0+\frac{s}{1}J_1+\frac{s(s-1)}{1.2}J_2+\cdots$$

qui se trouve établie avec la restriction de s positif. Une remarque maintenant sur les coefficients J_n qui figurent dans cette formule. Le premier J_0 est seul indépendant de a, si l'on suppose, ce que j'admettrai que la fonction $\theta(x)$ ne contienne pas cette quantité. Nous avons en effet,

$$J_0=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\theta(a\operatorname{tang}\varphi)\,d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$=\int_0^\infty \theta(x)\,dx.$$

Les autres comme je vais le faire voir, s'espriment tous explicitement, sous une formule simple, au moyen de,

$$\Theta(1) = \int_0^\infty \theta(x)\,(a + i\,x)^{-1}\,d\,x$$

$$= \frac{1}{2}(J_0 + J_1).$$

Qu'on fasse en effet pour un moment,

$$\varphi(s) = (2\,a)^s\,\Theta(s),$$

il est clair que J_n sera la différence finie d'ordre n de cette fonction, pour $s = 0$, en prenant $\Delta\,s = 1$. Désignant par n_1, $n_2, \ldots$ les coefficients binomiaux, nous aurons donc,

$$J_n = \varphi(n) - n_1\,\varphi(n-1) + n_2\,\varphi(n-2) - \cdots + (-1)^n\,\varphi(0),$$

ou bien si nous renversons l'ordre des termes,

$$(-1)^n\,J_n = \varphi(0) - n_1\,\varphi(1) + n_2\,\varphi(2) - \cdots + (-1)^n\,\varphi(n).$$

Cela étant, soit:

$$\Phi(a) = \int_0^\infty \theta(x)\,(a + i\,x)^{-1}\,d\,x$$

$$= \Theta(1),$$

on en conclura pour un entier k quelconque,

$$\frac{(-1)^{k-1} D_a^{k-1}\,\Phi(a)}{\Gamma(k)} = \Theta(k)$$

de sorte que nous pourrons écrire:

$$n_1\,\varphi(1) - n_2\,\varphi(2) + \cdots + (-1)^{n-1}\,\varphi(n)$$

$$= n_1\,(2\,a)\,\Phi(a) + n_2\,(2\,a)^2\,\frac{D_a\,\Phi(a)}{\Gamma(2)} + \cdots + (2\,a)^n\,\frac{D_a^{n-1}\,\Phi(a)}{\Gamma(n)}.$$

J'observerai que le second membre de cette égalité est le coefficient du terme en $\frac{1}{x}$ dans le produit des deux facteurs,

$$\Phi(a+x) = \Phi(a) + x\frac{D_a \Phi(a)}{\Gamma(2)} + \cdots + x^{n-1}\frac{D_a^n \Phi(a)}{\Gamma(n)},$$

$$\left(1+\frac{2a}{x}\right)^n = 1 + n_1\left(\frac{2a}{x}\right) + n_2\left(\frac{2a}{x}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2a}{x}\right)^n.$$

Nous avons donc la formule,

$$(-1)^n J_n = \Phi(0) - F(a)$$

ou $F(a)$ représente le résidu correspondant à la valeur $x=0$, de l'expression

$$\left(1+\frac{2a}{x}\right)^n \Phi(a+x),$$

c'est le résultat au quel je voulais parvenir. En revenant ensuite à $R(a, s)$ et aux coefficients J_n qui figurent dans l'équation (2), on trouve que $(-1)^n J_n$ est le résidu de

$$\left(1+\frac{2a}{x}\right)^n D_x J(a+x)$$

ou $J(a)$ est le terme complémentaire de la série de Stirling.