L1 aes feuille de TD 3 Corrigé

1.a. On note E_i l'évènement "la pile provient de l'échantillon i" $i = 1, 2, \dots, 10$. ~~On a $f_{E_i} = \frac{1}{10}$ puisque~~

L'énoncé donne $f_{E|E_1} = 0,2$; $f_{E|E_2} = 0,1$; $f_{E|E_3} = 0,1$; etc.

Dans la sous population formée de la réunion des 10 échantillons l'évènement E_1 ou E_2 ou ... ou E_{10} est certain et les évènements E_i sont disjoints. le calcul par conditionnement donne alors :

$$f_E = f_{E|E_1} \times f_{E_1} + \dots + f_{E|E_{10}} \times f_{E_{10}}$$

Toujours dans cette sous-population on a $f_{E_i} = \frac{1}{10}$ puisque les 10 échantillons sont disjoints et de même effectif

On obtient $f_E = \frac{1}{10}(0,2 + 0,1 + 0,1 + \dots + 0,35) = 0,2$

1b. La formule de Bayes donne $P(E_i|E) \times P(E) = P(E|E_i) \times P(E_i)$ donc $P(E_i|E) = \frac{P(E|E_i)}{P(E)} \times P(E_i)$

on connait $P(E|E_i) = f_{E|E_i}$ par l'énoncé et $P(E) = f_E = 0,2$ par la question 1.a. E_i est indépendant de E si $P(E_i|E) = P(E_i)$

donc si $\frac{f_{E|E_i}}{f_E} = 1$. On calcule $\frac{f_{E|E_1}}{f_E} = \frac{0,2}{0,2} = 1$; $\frac{f_{E|E_2}}{f_E} = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2}$; $\frac{f_{E|E_9}}{f_E} = \frac{0,35}{0,2} = 1,75$

E_1 est donc indépendant de E mais pas E_2 ni E_9 (et de loin)

1.c On veut comparer $P(E_2|E)$ à $P(E_9|E)$. D'après 1b $P(E_2|E) = \frac{1}{2} P(E_2) = 0,05$ et $P(E_9|E) = 1,75 \times P(E_9) = 0,175$

donc sachant que E est réalisé E_9 est plus probable que E_2 (très exactement $\frac{P(E_9|E)}{P(E_2|E)} = 3,5$ fois plus probable que E_2)

2.1 Notons D l'évènement "la pièce est défectueuse", E_1 l'évt "la pièce provient de l'atelier 1", E_2 l'évt "la pièce provient de l'atelier 2". Comme l'atelier 1 produit deux fois plus de pièces que l'atelier 2 on a $P(E_1) = 2P(E_2)$

Comme E_1, E_2 sont disjoints et que E_1 ou E_2 est certain, on a $P(E_1) + P(E_2) = 1$. En remplaçant dans la première équation on obtient $P(E_1) = \frac{2}{3}$ et $P(E_2) = \frac{1}{3}$

2.2 L'énoncé indique également $P(D|E_1) = \frac{3}{100}$ et $P(D|E_2) = \frac{4}{100}$. On veut calculer $P(D)$. Par conditionnement on a

$$P(D) = P(D|E_1) \times P(E_1) + P(D|E_2) \times P(E_2) = \frac{3}{100} \times \frac{2}{3} + \frac{4}{100} \times \frac{1}{3} = \frac{10}{300} = \frac{1}{30}$$

Rq on a forcément $P(D) \geq P(D|E_1)$: les deux ateliers ensemble ne font pas mieux que le meilleur des deux ateliers

$P(D) \leq P(D|E_2)$: ——— pire que le plus mauvais ———

2.3 On veut calculer $P(E_2|D)$. D'après la formule de Bayes $P(E_2|D) = P(D|E_2) \times \frac{P(E_2)}{P(D)} = \frac{4}{100} \times \frac{1/3}{1/30} = \frac{4}{10}$

Rq Sachant D E_2 est moins probable que E_1 bien que $P(D|E_2) > P(D|E_1)$, ceci parce que l'atelier 2 produit beaucoup moins de pièces que l'atelier 1

3. Notons A l'évènement "la personne est active", H l'évènement "la personne est un homme" et F l'évt "la personne est une femme".

le tableau donne $f_{A|F} = 0,831$; $f_{A|H} = 0,962$ et $f_A = 0,894$ (fréquence marginale)

On veut comparer f_H à f_F. On a $f_H + f_F = 1$ (F est la négation de H). le calcul par conditionnement donne

$f_A = f_{A|F} \times f_F + f_{A|H} \times f_H = 0,831 \times f_F + 0,962 \times (1 - f_F)$ et on connait $f_A = 0,894$. On obtient $f_F = \frac{0,894 - 0,962}{0,831 - 0,962} = 0,519..$

Conclusion $f_F > 1 - f_F = f_H$