L1 MD exam

ex 1 a (E) est de la forme $A \Rightarrow B$ qui est faux si et seul^t si A est vrai et B faux (d'après la table de vérité de $\Rightarrow$)

2 ici B est (P ou R) $B \equiv$ Faux si et seul^t si $P \equiv$ Faux et $R \equiv$ Faux (d'après la table de vérité de ou)

$P \equiv$ Faux et $R \equiv$ Faux est donc nécessaire pour que (E) soit Faux (mais ce n'est a priori pas suffisant : il faut aussi $A \equiv$ Vrai

b Il reste d'après a à regarder la valeur de vérité de $A = \big(Q$ et $(Q \Rightarrow P)$ et $(R \Rightarrow Q)\big)$ dans le cas $P \equiv R \equiv$ Faux pour décider de la valeur de vérité de (E)

2

P	Q	R	$Q \Rightarrow P$	$R \Rightarrow Q$	A	E
F	V	F	F	V	F	V
F	F	F	V	V	F	V

Pour toutes les autres valeurs de (P, Q, R), $E \equiv V$

Conclusion $E \equiv V$ quelles que soient les valeurs de vérité de P, Q, R (E est une tautologie)

c Une preuve consiste d'abord à fixer x de type T. On ne connaît pas les valeurs de vérité de P(x), Q(x), R(x) mais d'après b

2 la valeur de vérité de $\big(Q(x)$ et $(Q(x) \Rightarrow P(x))$ et $(R(x) \Rightarrow Q(x))\big) \Rightarrow \big(P(x)$ ou $R(x)\big)$ n'en dépend pas et est Vrai

Conclusion : l'énoncé est vrai

En calcul des séquents on peut écrire la preuve suivante (avec les règles s'appliquant de bas en haut)

$$\dfrac{\dfrac{}{x : T \vdash \big(Q(x) \text{ et } (Q(x) \Rightarrow R(x)) \text{ et } (R(x) \Rightarrow Q(x))\big) \Rightarrow \big(P(x) \text{ ou } R(x)\big)}\ (\vdash \vee)}{\vdash \forall x : T\ \big(Q(x) \text{ et } (Q(x) \Rightarrow P(x)) \text{ et } (R(x) \Rightarrow Q(x))\big) \Rightarrow \big(P(x) \text{ ou } R(x)\big)}\ (\vdash \forall)$$

ex 2 a $\exists y : \mathbb{R}\ \int_0^y f(x)\,dx > 0$ les variables sont y, f, x

y est liée par $\exists$
x est liée par la construction $\int f(x)\,dx$
f est une variable libre

1 pour variables liées
1 — libre
1 pour type
1 pour explication

le type raisonnable pour f est $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à cause de $\int_0^y f(x)\,dx > 0$

b $\exists p : \mathbb{N},\ \forall n : \mathbb{N},\ n \geq p \Rightarrow u_n \geq b$

p, n variables liées par $\exists$ et $\forall$
u, b variables libres b est raisonnablement de type $\mathbb{R}$ à cause de la relation d'ordre $b \leq \dots$
u est de type suite à cause de la notation u_n, suite de nbre réels à cause de la relation d'ordre $u_n \geq b$ donc $u : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (ou encore $(u_n) : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$)

c $\forall a : \mathbb{R}\ \lim_{n \to +\infty} \dfrac{(a+1)n + n^2 + a}{2n^2 + 1} = \dfrac{1}{2}$

a liée par $\forall$
n liée par la construction lim
pas de variable libre

2 traduction de (b) : la suite (u_n) est minorée par b à partir d'un certain rang

ex3 a Mal formée : la variable x est liée deux fois dans un même énoncé

1

1 b Mal formé : dans la construction $\int_0^x \sin(x)dx$ x est à la fois variable libre (borne de l'intégrale) et liée par la construction

1 c bien formé : x est lié dans 2 énoncés distincts ce qui ne provoque pas de conflit

ex4 a $\forall x : \mathbb{R}, x^2 - 2x + 4 \neq 0$

1

1 b $\exists b : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, \sin(x) \geq b$

2 c $\exists x : \mathbb{R}, x^3 + x + 1 = 0$ et $\forall x, y : \mathbb{R} \ (x^3 + x + 1 = 0$ et $y^3 + y + 1 = 0) \Rightarrow x = y$

ex 5 a (u_n) variable libre déclarée. n, m, ℓ variables liées. Traduction : Soit (u_n) une suite de nbre réels. On suppose

1 pour variables que (u_n) est croissante et majorée alors (u_n) converge vers un réel

2 pour traduction (Existence d'une limite pour une suite croissante majorée de réels)

b f, a, b variables libres déclarées, x variable liée. Traduction : Soit f une application continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et a, b deux réels. On suppose $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$ alors f s'annule sur $[a, b]$

(Théorème des valeurs intermédiaires)

5c f, a, b variables libres déclarées, x variable liée. Traduction : Soit f une application dérivable $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et a, b deux réels. On suppose $f' > 0$ et $a < b$ alors $f(a) < f(b)$

On reconnaît le thm disant qu'une appl. dérivable de dérivée strict^t positive est strict^t croissante

ex 6 On prouve que le polynôme en x $(2-a)x^2+4x+a$ admet une racine réelle quel que soit la valeur du paramètre $a : \mathbb{R}$

1

1+1 On utilise le fait que $16-4(2-a)a$ est strict^t positif dès que $a \neq 2$ (observation non prouvée)

et le fait qu'un trinôme du second degré admet une racine réelle dès que son discriminant est > 0

1 On prouve le résultat souhaité en distinguant le cas $a=2$ du cas $a \neq 2$. $a=2$ le polynôme $(2-a)x^2+4x+a$ est de degré 1, vaut

1 $4x+2$ et on sait expliciter la racine $-\frac{1}{2}$

1 pour $a \neq 2$ on observe que le discriminant est strict^t positif. On utilise le fait qu'un trinôme du second degré de discriminant > 0 admet une racine réelles.

0,5 par règle règles : voir sujet