L1 MD Quelques réponses pour la feuille 3

Ex 1 $P \text{ ou } \neg P \equiv \neg(\neg P \text{ et } P)$
$\equiv P \Rightarrow P$

($\equiv$ signifie "à même valeur de vérité que". Ici on s'interdit le calcul des valeurs de vérité, ie on s'interdit les constantes V, F. A défaut on pourrait écrire $P \text{ ou } \neg P \equiv V$)

$(\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P \equiv \neg(\neg\neg P \text{ ou } P) \text{ ou } P \equiv \neg P \text{ ou } P \equiv \neg(\neg P \text{ et } P)$

$\exists x\ P(x) \Rightarrow Q(x) \equiv \neg(\forall x, P(x) \text{ et } \neg Q(x))$

Ex 2 $P \text{ ou } \neg P$ la table de vérité donne V quelle que soit la valeur de vérité de P. donc c'est une tautologie

$((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$: on observe qu'un énoncé $A \Rightarrow B$ est vrai dès que A est Faux ou B vrai. Le seul cas à calculer est lorsque A est Vrai, il faut alors déterminer la valeur de B. L'énoncé dont on parle est ~~[illegible]~~ donc vrai sauf peut être si $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow R)$ est vrai et si P est vrai : il faut alors déterminer la valeur de R

or ~~[illegible]~~ si P et $P \Rightarrow Q$ sont vrais alors Q est vrai (d'après la table de vérité de $P \Rightarrow Q$) puis si $Q \Rightarrow R$ est vrai alors R est vrai

Pour résumé : ~~[illegible]~~ $P,\ P \Rightarrow Q,\ Q \Rightarrow R \equiv V$ entraine $Q \equiv V$ puis $R \equiv V$ donc $P \Rightarrow R \equiv V$

~~[illegible]~~ $((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ ~~[illegible]~~ dit que l'implication $\Rightarrow$ est transitive

$P \text{ ou } \neg P$ fait référence au tiers exclus : sa valeur de vérité est V même si on ne connaît pas celle de P

Ex 3 On note $\overline{A}$ la valeur dans $\mathbb{F}_2$ d'un énoncé A : $\overline{A} = 1$ si $A \equiv V$, $= 0$ sinon. On observe (cf cours)

$$\overline{\neg A} = 1 + \overline{A}$$
$$\overline{A \text{ et } B} = \overline{A} \times \overline{B}$$
$$\overline{A \text{ ou } B} = \overline{\neg(\neg A \text{ et } \neg B)} = 1 + (1+\overline{A})(1+\overline{B}) = \overline{A} + \overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}$$

donc $\overline{P \text{ ou } \neg P} = \overline{P} + (1+\overline{P}) + \overline{P}(1+\overline{P}) = 1 + 3\overline{P} + \overline{P}^2 = 1 + \overline{P} + \overline{P} = 1$ (car $\forall x \in \mathbb{F}_2$, $x^2 = x$, $3x = x$, $2 = 0$)

donc $P \text{ ou } \neg P \equiv V$ quel que soit P

$$\overline{A \Rightarrow B} = \overline{\neg(A \text{ et } \neg B)} = 1 + \overline{A}(1+\overline{B}) = 1 + \overline{A} + \overline{A}\,\overline{B}$$

$$\overline{(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)} = 1 + \overline{(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)}\,(1 + \overline{P \Rightarrow R}) = 1 + (1+\overline{P}(1+\overline{Q}))(1+\overline{Q}(1+\overline{R}))(1+1+\overline{P}(1+\overline{R}))$$

$$= 1 + \left(1 + \overline{P}(1+\overline{Q}) + \overline{Q}(1+\overline{R}) + \overline{P}\,\underbrace{(1+\overline{Q})\overline{Q}}_{=0}(1+\overline{R})\right)\overline{P}(1+\overline{R})$$

$$= 1 + \underbrace{\overline{P}(1+\overline{R}) + \underbrace{\underbrace{\overline{P}^2}_{\overline{P}}(1+\overline{Q})(1+\overline{R}) + \overline{Q}\,\overline{P}\underbrace{(1+\overline{R})^2}_{1+\overline{R}}}_{\overline{P}(1+\underbrace{\overline{Q}+\overline{Q}}_{0})(1+\overline{R})}}_{0}$$

$= 1$ donc l'énoncé est V quels que soit P, Q, R ex4 $(\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z}, n \geq m) \equiv V$ donc le premier énoncé à ~~pas~~ même valeur de vérité que $V \Leftrightarrow F \equiv F$

$(\exists m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq m) \equiv F$

le second est vrai puisqu'il s'évalue comme $V \Leftrightarrow V$. Cependant ce qui est à gauche de $\Leftrightarrow$ ne dit pas la même chose sur $\mathbb{Z}$, la fonction $n \mapsto n^2$ et la relation d'ordre $\geq$ que ce qui est à droite : ce qui est à gauche est impliqué par le fait que $\geq$ est réflexive (on peut prendre $m = n^2$), ce qui est à droite dit que la fonction $n \mapsto n^2$ est minorée sur $\mathbb{Z}$.