L1 MD - Quelques réponses pour la feuille de TD 6

1c a, b, f sont des variables libres non déclarées dans $a<b, f\geq 0 \vdash \int_a^b f \geq 0$

$a,b : \mathbb{R}$ est compatible avec $a<b$ et avec $\int_a^b f$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue est compatible avec $\int_a^b f$

$\leadsto$ séquent corrigé : $a,b : \mathbb{R},\ f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue$,\ a<b,\ f\geq 0 \vdash \int_a^b f \geq 0$

En langage naturel : "Soit a et b deux nombres réels soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose a inférieur à b et f positive. Alors $\int_a^b f$ (intégrale de a à b de f) est positive."

1d $u_0 = \frac{1}{2},\ (\forall n\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}) \vdash \lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

n est une variable liée non typée à gauche comme à droite. Elle sert à indexer (u_n) qui est une variable libre (ou plutôt u est la variable libre et (u_n) est une autre notation pour u). $n : \mathbb{N}$ et $(u_n) :$ suite sont des types compatibles. Plus précisément $(u_n) : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ à cause de $\sqrt{u_n}$ (il faut en fait (u_n) à valeur dans $\mathbb{R}_+$ pour que $\sqrt{u_n}$ soit bien défini)

$\leadsto$ séquent corrigé : $(u_n) : \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u_0 = \frac{1}{2},\ (\forall n : \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}) \vdash \lim_{\substack{n:\mathbb{N}\\ n\to+\infty}} u_n = 1$

En langage naturel : "Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

Alors (u_n) converge vers 1"

1e $\vdash \det A \neq 0 \Rightarrow \{(x,y),\ A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\}$ est un singleton

A est une variable libre, de type Matrice 2x2 à cause de $\det A$ et de $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. $A : M_2(\mathbb{R})$ est un type compatible.

x,y sont des variables liées par la construction $\{(x,y), -\}$. $x,y : \mathbb{R}$ est un type compatible avec $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\leadsto$ séquent corrigé $A : M_2(\mathbb{R}) \vdash \det A \neq 0 \Rightarrow \{(x,y) : \mathbb{R}^2,\ A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\}$ est un singleton.

En langage naturel : "Soit A une matrice carré de taille 2 de nombres réels. Si le déterminant de A est ~~non~~ nul alors l'ensemble des solutions de l'équation $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ (ou encore le noyau de A) est un singleton"

2a $E : \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ M : \mathbb{R},\ M$ est un majorant de $E \vdash \cdots$

b $E : \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ (\exists M : \mathbb{R},\ M$ est un majorant de $E) \vdash \cdots$ partiellement formalisé. $E : \mathcal{P}(\mathbb{R})$, E admet un plus petit él^t $\vdash \cdots$ convient aussi

c $E : \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ (\exists m : \mathbb{R},\ m \in E$ et m minore $E) \vdash$

f $n : \mathbb{N}^\times,\ A : M_n(\mathbb{R}),\ A$ est inversible $\vdash \cdots$ ($\mathbb{N}^\times$ est une notation pour $\mathbb{N}\setminus\{0\}$). On rencontre aussi dans les livres le type $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles.

g $m,n : \mathbb{N}^\times,\ A : M_{m,n}(\mathbb{R}),\ X : M_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX = 0 \vdash \cdots$

3a $\vdash$ le produit de deux nombres positifs est positifs

$\vdash \forall a,b:\mathbb{R},\ a\geq 0$ et $b\geq 0 \Rightarrow ab\geq 0$ Rq: souvent on dit positif ou nul pour ≥ 0, strict^t positif pour >0, "positif" est ambiguë

$a,b:\mathbb{R},\ a\geq 0,\ b\geq 0 \vdash ab\geq 0$ après application des règles $(\vdash\forall)$, $(\vdash\Rightarrow)$, (et $\vdash$)

3b $\vdash$ toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure

$\vdash \forall S:\mathcal{P}(\mathbb{R}),\ S\neq\emptyset$ et S est majorée $\Rightarrow$ S admet une borne supérieure (formalisation partielle)

$S:\mathcal{P}(\mathbb{R}),\ S\neq\emptyset$, S est majorée $\vdash$ S admet une borne supérieure : après application des règles $(\vdash\forall)$, $(\vdash\Rightarrow)$, (et $\vdash$)

$S:\mathcal{P}(\mathbb{R}), (\exists x:\mathbb{R}, x\in S), (\exists M:\mathbb{R}, \forall x: S, x\leq M) \vdash \exists b:\mathbb{R}, (\forall x:S, x\leq b)$ et $(\forall b':\mathbb{R}, (\forall x:S, x\leq b')\Rightarrow b'\geq b)$

ou bien $(\exists M:\mathbb{R}, \forall x:\mathbb{R}, x\in S\Rightarrow x\leq M)$

après formalisation complète

$S:\mathcal{P}(\mathbb{R}), x:\mathbb{R}, M:\mathbb{R}, x\in S, (\forall y:S, y\leq M) \vdash \exists b:\mathbb{R}, (\forall y:S, y\leq b)$ et $(\forall b':\mathbb{R}, (\forall y:S, y\leq b')\Rightarrow b'\geq b)$

après application deux fois de la règle $(\exists\vdash)$. On a dû renommer la variable liée x en y pour éviter des conflits.

3d $\vdash$ Toute fonction polynomiale est continue

$\vdash \forall f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f est polynomiale $\Rightarrow$ f est continue (après formalisation partielle)

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f est polynomiale $\vdash$ f est continue (après application des règles $(\vdash\forall)$ et $(\vdash\Rightarrow)$)

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \left(\exists n:\mathbb{N}, \exists (a_k)_{0\leq k\leq n}:\mathbb{R}^{n+1}, \forall x:\mathbb{R}, f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) \vdash \forall x_0:\mathbb{R}$, f est continue en x_0 (après formalisation)

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, n:\mathbb{N}, (a_k)_{0\leq k\leq n}:\mathbb{R}^{n+1}, \left(\forall x:\mathbb{R}, f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right), x_0:\mathbb{R} \vdash$ f est continue en x_0 (après application des règles $(\exists\vdash)$ et $(\vdash\forall)$)

f est continue en x_0 se formalise de plusieurs façons équivalentes mais pas formellement équivalentes (l'équivalence a besoin d'une preuve):

$\exists \ell:\mathbb{R}, \forall\varepsilon:]0,+\infty[, \exists\eta:]0,+\infty[, \forall x:\mathbb{R}, |x-x_0|<\eta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

ou bien (on a forcément $\ell=f(x_0)$) : $\forall\varepsilon:]0,+\infty[, \exists\eta:]0,+\infty[, \forall x:\mathbb{R}\ |x-x_0|<\eta\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

[Du point de vue de la preuve du séquent initial, on va plutôt utiliser les théorèmes sur la limite d'une somme et d'un produit de fonctions en x_0 et donc on va plutôt formaliser "f est continue en x_0" par "$\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe"]

(L1MD corr f6 - suite)

3f $\vdash$ le produit de deux matrices carré inversibles de même taille est une matrice carré inversible

$\vdash \forall n:\mathbb{N}^* \ \forall M,N: M_n(\mathbb{R}) \ \left(\exists M',N': M_n(\mathbb{R}) \ MM' = I_n \text{ et } NN' = I_n\right) \Rightarrow \left(\exists m:\mathbb{N},\ MN \in M_m(\mathbb{R}) \text{ et } \exists P: M_m(\mathbb{R}),\ (MN)P = I_m\right)$

Au passage on a formalisé le fait que MN est une matrice carré mais on sait ~~que~~ $MN \in M_n(\mathbb{R})$ $(m=n)$, d'où la formalisation plus simple

$\vdash \forall n:\mathbb{N}^*, \forall M,N: M_n(\mathbb{R}) \ \left(\exists M',N': M_n(\mathbb{R}), MM' = I_n \text{ et } NN' = I_n\right) \Rightarrow \left(\exists P: M_n(\mathbb{R}), (MN)P = I_n\right)$

Après application des règles $(\vdash \forall)$, $(\vdash \Rightarrow)$, $(\exists \vdash)$, $(\text{et} \vdash)$ on obtient

$n:\mathbb{N},\ M,N$, $M',N': M_n(\mathbb{R}),\ MM' = I_n,\ NN' = I_n \ \vdash \ \exists P: M_n(\mathbb{R}), (MN)P = I_n$

Rq on connait la suite de la preuve : on applique la règle $(\vdash \exists)$ $(P := N'M')$, on observe $(MN)(N'M') = (M(NN'))M'$ (associativité du produit), on observe $MI_n = M$, on applique la règle $(=)$

4a

$$\frac{(u_n):\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u_0 = \frac{1}{2},\ (\forall n:\mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}) \ \vdash u_0 < 1 \qquad (u_n):\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u_0 = \frac{1}{2},\ (\forall n:\mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}),\ k:\mathbb{N},\ u_k < 1 \vdash u_{k+1} < 1}{(u_n):\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u_0 = \frac{1}{2},\ (\forall n:\mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}) \ \vdash \forall k:\mathbb{N},\ u_k < 1}\ (\text{Rec})$$

C'est la règle (Rec). On a changer "récurrence sur n que $u_n < 1$" par "récurrence sur k que $u_k < 1$" pour éviter les conflits de variables

4b

$$\frac{u,v,w:\mathbb{R}^2,\ u = 0 \ \vdash \ \underbrace{(u,v,w) \text{ est liée}}_{\text{ou bien } u,v,w \text{ sont liés}} \qquad u,v,w:\mathbb{R}^2,\ u \neq 0 \ \vdash (u,v,w) \text{ liée}}{u,v,w:\mathbb{R}^2 \ \vdash (u,v,w) \text{ est liée}}\ (H)$$

Ici à nouveau une seule règle : "distinguer suivant H"

4c $\vdash$ Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure ~~$(u_n):\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n)$ est croissante, (u_n) est majorée $\vdash (u_n)$ converge~~

⋮

$(u_n):\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, (u_n) est croissante, (u_n) est majorée $\vdash$ (u_n) converge

Il y a cette fois beaucoup de séquent intermédiaire