1. On reconnaît les règles $(\vdash \exists (x_n))$ et $(x := 1)$ (particularisation d'un séquent) appliquées de haut en bas. Le séquent du haut traduit le fait que sin est défini sur $\mathbb{R}$ entier à valeur dans $\mathbb{R}$. Le séquent du bas dit l'existence d'une suite (u_n) de nombres réels définie par récurrence par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$. C'est ce que prouve le calcul.

2. On reconnaît les règles (mp) et $(\exists \vdash)$ appliquées de bas en haut (voir au dos). Le séquent du haut est l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires ~~dans~~ avec la particularisation suivante : les bornes de l'intervalle d'étude sont 0 et 1 (ce pourrait être plus généralement $a, b \in \mathbb{R}$), la valeur intermédiaire est 0 (ce pourrait être un nombre entre $f(a)$ et $f(b)$). C'est cet énoncé que prouve le calcul.

En bas on trouve cinq séquents. Le premier est un résultat technique propre à la preuve : sous le contexte $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue avec $f(0) \leq 0$, $f(1) \geq 0$, sous le contexte $a, b : [0,1]$ avec $a \leq b$, $f(a) \leq 0$, $f(b) \geq 0$, il existe $c, d : [0,1]$ avec $c = a$, $d = a + \frac{b-a}{2}$, $f(d) \geq 0$ ou il existe $c, d : [0,1]$ avec $d = b$, $c = a + \frac{b-a}{2}$, $f(c) \leq 0$. ~~Autrement dit~~ Le séquent n'est pas prouvé mais sa preuve est immédiate en distinguant suivant $f(a + \frac{b-a}{2}) \leq 0$ et $f(a + \frac{b-a}{2}) > 0$:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f \text{ est } C^0,\ f(0) \leq 0,\ f(1) \geq 0,\ a, b : [0,1],\ a \leq b,\ f(a) \leq 0,\ f(b) \geq 0 \vdash \exists c, d : [0,1], (c = a \text{ et } d = a + \tfrac{b-a}{2} \text{ et } f(d) \geq 0)$$
$$\text{ou } (d = b \text{ et } c = a + \tfrac{b-a}{2} \text{ et } f(c) \leq 0)$$

(HL)↑

$$\text{—}, f(a + \tfrac{b-a}{2}) \leq 0 \vdash \exists c, d : [0,1], (c = a \text{ et} \dots) \text{ ou } (d = b \text{ et} \dots) \qquad \text{—}, f(a + \tfrac{b-a}{2}) > 0 \vdash \exists c, d : [0,1], (c = a \text{ et} \dots) \text{ ou } (d = b \text{ et} \dots)$$

$(\vdash \exists)$ $c := a + \frac{b-a}{2}$, $d := b$ ↑ $\qquad$ $(\vdash \exists)$

$$\text{—}, f(a + \tfrac{b-a}{2}) \leq 0 \vdash (a + \tfrac{b-a}{2} = a \text{ et } b = a + \tfrac{b-a}{2} \text{ et } f(b) \geq 0)$$
$$\text{ou } (b = b \text{ et } a + \tfrac{b-a}{2} = a + \tfrac{b-a}{2} \text{ et } f(a + \tfrac{b-a}{2}) \leq 0$$

⋮ (idem)

$(\vdash \text{ou})$ ↑

$$\text{—}, f(a + \tfrac{b-a}{2}) \leq 0 \vdash b = b \text{ et } a + \tfrac{b-a}{2} = a + \tfrac{b-a}{2} \text{ et } f(a + \tfrac{b-a}{2}) \leq 0$$

Ce séquent sert à prouver le séquent plus haut qui indique l'existence de deux suites adjacentes $(a_n), (b_n)$ de $[0,1]^{\mathbb{N}}$ vérifiant $f(a_n) \leq 0$ et $f(b_n) \geq 0$. Les étapes intermédiaires ne sont pas écrites mais il s'agit principalement d'appliquer la règle $(\vdash \exists (x_n))$ et de vérifier que $\lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$. La construction de ces suites est ce qu'on appelle une construction par dichotomie.

Le deuxième séquent tout en bas $\text{—} \vdash \exists \ell : [0,1], \ell = \lim(a_n) = \lim(b_n)$ est une application du théorème sur les suites adjacentes (la seule particularisation est que ces suites sont à valeurs dans $[0,1]$). La limite commune sera le candidat pour un $x : [0,1]$ tel que $f(x) = 0$.

On observe d'abord $f(\ell) \leq 0$ et $f(\ell) \geq 0$. Cela n'est pas prouvé ~~mais la preuve~~. On le prouverait en appliquant la continuité de f : $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell$ donc $f(a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(\ell)$ puis en utilisant la compatibilité de la limite avec $\leq$: $f(a_n) \leq 0$ donc $\lim_{n \to \infty} f(a_n) \leq 0$ (*). Idem avec $b_n \to \ell$ et $f(b_n) \geq 0$. L'existence des suites adjacentes $(a_n), (b_n)$ avec les propriétés prescrites et le fait que ~~la limite commune~~ f s'annule en la limite commune de ces suites prouve le fait que f s'annule sur $[0,1]$.

Lecture d'une preuve

On rappelle ci-dessous l'une des règles de construction d'une suite par récurrence :

$$(\vdash \exists(x_n)) \quad \frac{\Gamma, x : \mathcal{T}, P(x) \ \vdash \ \exists y : \mathcal{T}, (P(y) \text{ et } Q(x,y))}{\Gamma, x : \mathcal{T}, P(x) \ \vdash \ \exists(x_n) : \mathcal{T}^{\mathbb{N}}, x_0 = x \text{ et } \forall n : \mathbb{N}, (P(x_n) \text{ et } Q(x_n, x_{n+1}))}$$

Les deux calculs suivant présente une preuve ou une esquisse de preuve (esquisse parce que le passage de certains séquents à d'autres n'est pas détaillé ; on indique un tel passage par une double règle). En cours de calcul, on écrit — à gauche de $\vdash$ pour rappeler le contexte du séquent précédent sans le réécrire. Répondez pour chacun de ces calculs aux questions suivantes :

Les règles de cette preuve s'appliquent t-elles de haut en bas ou de bas en haut ? Pouvez vous nommer les règles en question ? Quel résultat prouve t-on ? Sur quels résultats non prouvés s'appuie la preuve ? Reconnaissez vous dans ces résultats non prouvés des théorèmes du cours ? Quelles sont les idées de la preuve ? Pouvez vous compléter les passages manquants ?

1.

$$\begin{array}{cl}
x : \mathbb{R} \ \vdash \ \exists y : \mathbb{R}, y = \sin(x) & \\
\hline
x : \mathbb{R} \ \vdash \ \exists(u_n) : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u_0 = x \text{ et } \forall n : \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n) & (\vdash \exists(u_n)) \downarrow \\
\hline
\vdash \ \exists(u_n) : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u_0 = 1 \text{ et } \forall n : \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n) & (x := 1) \downarrow
\end{array}$$

2.

$$\begin{array}{c}
f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f \text{ est continue},\ f(0) \leq 0, f(1) \geq 0 \ \vdash \ \exists x : [0,1],\ f(x) = 0 \qquad (\sqcap p) \uparrow \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c}
— \vdash \exists(a_n),(b_n) : [0,1]^{\mathbb{N}}, \big(a_0 = 0 \text{ et } b_0 = 1 \\
\text{et } (\forall n : \mathbb{N}, (a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \\
\text{et } f(a_n) \leq 0 \text{ et } f(b_n) \geq 0)) \\
\text{et } \lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0\big) \\
\hline
\vdots \\
\hline
—, \begin{matrix} a, b : [0,1], a \leq b, \\ f(a) \leq 0, f(b) \geq 0 \end{matrix} \ \vdash \exists c, d : [0,1], \begin{matrix} (c = a \text{ et } d = a + \frac{1}{2}(b-a) \text{ et } f(d) \geq 0) \\ \text{ou } (d = b \text{ et } c = a + \frac{1}{2}(b-a) \text{ et } f(c) \leq 0) \end{matrix}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
—, \begin{matrix} \exists(a_n),(b_n) : [0,1]^{\mathbb{N}}, \big(a_0 = 0 \text{ et } b_0 = 1 \\ \text{et } (\forall n : \mathbb{N}, (a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \\ \text{et } f(a_n) \leq 0 \text{ et } f(b_n) \geq 0)) \\ \text{et } \lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0\big) \end{matrix} \ \vdash \exists x : [0,1],\ f(x) = 0 \\
\hline
(\exists \vdash) \uparrow \\
—, (a_n),(b_n) : [0,1]^{\mathbb{N}}, \begin{matrix} a_0 = 0 \text{ et } b_0 = 1 \\ \text{et } (\forall n : \mathbb{N}, (a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \\ \text{et } f(a_n) \leq 0 \text{ et } f(b_n) \geq 0)) \\ \text{et } \lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0 \end{matrix} \ \vdash \exists x : [0,1],\ f(x) = 0 \\
\hline
(\sqcap p) \uparrow \\
— \vdash \exists l : [0,1], l = \lim(a_n) = \lim(b_n) \qquad
\begin{array}{c}
—, \exists l : [0,1], l = \lim(a_n) = \lim(b_n) \ \vdash \ \exists x : [0,1],\ f(x) = 0 \\
\hline
(\exists \vdash) \uparrow \\
—, l : [0,1], l = \lim(a_n) = \lim(b_n) \ \vdash \ f(l) = 0 \\
\hline
(\sqcap p) \uparrow \\
— \vdash f(l) \leq 0 \quad — \vdash f(l) \geq 0 \quad —, f(l) \leq 0, f(l) \geq 0 \vdash f(l) = 0
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

(*) La preuve en calcul des séquents de $f(\ell) \leq 0$ avec juste ce dont on a besoin du contexte est :

$$\dfrac{f : [0,1] \to \mathbb{R},\ (a_n) : [0,1]^{\mathbb{N}},\ \ell : [0,1],\ f \text{ est continue},\ \ell = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n,\ (\forall n : \mathbb{N}, f(a_n) \leq 0) \vdash f(\ell) \leq 0}{— \vdash \lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = f(\ell) \qquad\qquad —, \lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = f(\ell) \vdash f(\ell) \leq 0} \ (\sqcap P) \uparrow$$

Le premier séquent en bas à gauche s'obtient en particularisant le théorème

$$I : \text{intervalle de } \mathbb{R},\ f : I \to \mathbb{R},\ x_0 : I,\ (u_n) : I^{\mathbb{N}},\ \lim_{n \to +\infty} u_n = x_0,\ f \text{ est } C^0 \text{ en } x_0 \vdash \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(x_0)$$

Le second séquent en bas à droite s'obtient en particularisant le théorème

$$(u_n) : \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \ell, M : \mathbb{R},\ \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell,\ (\forall n : \mathbb{N}, u_n \leq M) \vdash \ell \leq M$$

<u>Conclusion</u> : On démontre que f s'annule en construisant par récurrence et par dichotomie deux suites adjacentes $(a_n), (b_n)$ vérifiant $f(a_n) \leq 0$ et $f(b_n) \geq 0$*. Alors $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$ vérifie $f(\ell) = 0$

(*) a_{n+1} sera le milieu de $[a_n, b_n]$ et b_{n+1} sera b_n si $f\left(a_n + \frac{b_n - a_n}{2}\right) \leq 0$. Sinon a_{n+1} sera a_n et b_{n+1} sera le milieu de $[a_n, b_n]$. De la sorte $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n - a_n = 0$.