L1 MD Corrigé de l'interrogation du 14 Mars 2014

1. Valeur de vérité de $(P \text{ et } Q) \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$ suivant les valeurs de vérité de P et de Q

On sait que $A \Rightarrow B$ est vrai sauf ~~peut~~ si A est vrai et B faux

donc $(P \text{ et } Q) \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$ est vrai sauf peut être si $(P \text{ et } Q)$ est vrai, mais alors P est vrai et Q est vrai

donc $P \Leftrightarrow Q$ est aussi vrai. Conclusion $(P \text{ et } Q) \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$ est toujours vrai

Alternative :

P	Q	P et Q	$P \Leftrightarrow Q$	$(P \text{ et } Q) \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	V	V

$((P \Rightarrow Q) \text{ et } R) \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$: Comme précédemment cet énoncé est vrai sauf si $(P \Rightarrow Q)$ et R est vrai et si $R \Rightarrow Q$ est faux mais alors R est vrai et ~~donc~~ Q est Faux et $P \Rightarrow Q$ est vrai donc P est ~~Faux~~. Conclusion : l'énoncé de départ est vrai sauf si P est Faux, Q est Faux et R est vrai

2. $\overline{P \Rightarrow Q} = \overline{\neg P \text{ ou } Q} = \overline{\neg(P \text{ et } \neg Q)} = 1 + \bar{P}(1+\bar{Q})$

$$\overline{((P \Rightarrow Q) \text{ et } \neg Q) \Rightarrow \neg P} = \cancel{1}+(1+\bar{P}(1+\bar{Q}))\underbrace{(1+\bar{Q})(\underbrace{1+1}_{=0}+\bar{Q})}_{\underbrace{\bar{Q}+\underbrace{\bar{Q}^2}_{=\bar{Q}}}_{=0}} = 1$$

indépendamment de $\bar{P}$ et $\bar{Q}$, donc $((P \Rightarrow Q) \text{ et } \neg Q) \Rightarrow \neg P$ est

Vrai indépendamment des valeurs de vérité de P et de Q

3. a. $\forall y \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant f(y)$ $\mathbb{R}$ est une constante, y est une variable liée par $\forall$, f et x sont des variables libres

f ~~est~~ désigne raisonnablement une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à cause de la notation $f(y)$ avec $y \in \mathbb{R}$

$f(y)$ ~~est~~ (raisonnablement) un réel à cause de la relation $f(x) \leq f(y)$. $f(y)$ pourrait aussi bien être un nombre rationnel ou un entier relatif ou naturel. Dans tous les cas f est une application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

x est un nombre réel puisqu'on peut écrire $f(x)$

L'énoncé dit que $f(x)$ minore les valeurs prises par f donc que f atteint sa plus petite valeur (son minimum) en x

3 b. $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$: $\mathbb{N}$ est une constante, p et n sont des variables liées par $\exists$ et $\forall$, u est une variable libre. La notation u_n ~~indique~~ avec $n \in \mathbb{N}$ indique que u est une suite (qu'on note aussi (u_n))

La relation $u_{n+1} \geqslant u_n$ indique (raisonnablement) que ~~(u)~~ u_n est un nombre réel (ou un nbre rationnel ou entier)

(u_n) est une suite de nombres réels (raisonnablement)

L'énoncé dit que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

Negation : a $\exists y \in \mathbb{R}, \ f(x) > f(y)$

b $\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant p$ et $u_{n+1} < u_n$

4.a. $\forall x \in \mathbb{R}, \ x^2 + x + 1 \neq 0$

b. $\exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \exists x, y \in \mathbb{R}, \ x \neq y$ et $f(x) = f(y)$

c. $\forall M \in \mathbb{R}, \ \exists x \in]0, +\infty[, \ \ln(x) > M$

d. $\forall z \in \mathbb{C}, \ z^3 + z + 1 = 0 \Rightarrow \bar{z}^3 + \bar{z} + 1 = 0$