L1MD – Interrogation 2 **5 mai 2014**

Sujet A

durée 40mn ; tout document et matériel électronique interdit

Nom : **Prénom :**

Sujet sur deux pages !

1. Les séquents suivants sont mal formés. Compléter les en déclarant les variables libres avec un type raisonnable et en donnant un type raisonnable aux variables liées lorsque celui-ci est manquant. Expliquer votre choix de type.

a. $X \subset Y,\ Y \subset Z \ \vdash\ X \subset Z$

b. $a > 0,\ (\forall x, (x \geq a \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{x})) \ \vdash\ \int_a^{+\infty} f = +\infty$

c. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \vdash\ BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. $X, Y, Z : \mathrm{Ens},\ X \subset Y,\ Y \subset Z \vdash X \subset Z$ On choisit le type ensemble pour X, Y, Z à cause du symbole d'inclusion $\subset$

b. $a : \mathbb{R},\ f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, $a > 0,\ (\forall x : \mathbb{R}, (x \geqslant a \Rightarrow f(x) \geqslant \frac{1}{x})) \vdash \int_a^{+\infty} f = +\infty$

on choisit le type $\mathbb{R}$ pour a à cause de la relation $a > 0$ et de la construction $\int_a^{+\infty} f$

on choisit le type $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue à cause de la construction $\int_a^{+\infty} f$, égalt à cause de l'énoncé $f(x) \geqslant \frac{1}{x}$

on pourrait aussi prendre comme type $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On a besoin de la continuité pour former $\int_a^{+\infty} f$

on choisit le type $\mathbb{R}$ pour la variable liée x à cause de la relation $x \geqslant a$, des expressions $f(x)$, $\frac{1}{x}$

c. $A, B : M_2(\mathbb{R}),\ AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vdash BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On choisit le type matrice carré de taille 2 en cohérence avec la relation $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

A et B sont forcément des matrices, forcément carré puisqu'on forme AB et BA, forcément de taille 2

2. Traduire chacun des théorèmes suivants (indiqués entre "–") par un séquent puis formaliser en utilisant au besoin les formalisations partielles indiquées (c'est à dire sans les formaliser davantage).

Quel séquent ou liste de séquents obtient on après application autant qu'on le peut des règles "gratuites" $(\vdash \forall), (\vdash \Rightarrow), (\vdash \text{et}), (\exists \vdash), (\text{et} \vdash), (\text{ou} \vdash)$?

a. "La somme de deux suites de nombres réels convergeantes est une suite convergente" — En utilisant le résumé $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$ avec les variables de son choix.

b. "Soient a, b, c, d quatre ensembles. Alors il existe un ensemble dont les éléments sont exactement a, b, c et d, et deux tels ensembles sont égaux" — On n'utilisera pas le résumé $\exists!$; on utilisera les énoncés tels que $x \in X$, $X = Y$ avec les variables de son choix.

a. $\vdash$ la somme ... convergente

$$\vdash \forall (u_n), (v_n) : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \left(\left(\exists \ell_1 : \mathbb{R}, \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell_1 \right) \text{ et } \left(\exists \ell_2 : \mathbb{R}, \lim_{n \to +\infty} v_n = \ell_2 \right) \right) \Rightarrow \left(\exists \ell : \mathbb{R}, \lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = \ell \right)$$

Après application (dans l'ordre) des règles $(\vdash \forall), (\vdash \forall), (\vdash \Rightarrow), (\text{et} \vdash), (\exists \vdash), (\exists \vdash)$ on obtient :

$$(u_n) : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (v_n) : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \ell_1, \ell_2 : \mathbb{R}, \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell_1, \lim_{n \to +\infty} v_n = \ell_2 \vdash \exists \ell : \mathbb{R}, \lim_{n \to +\infty} u_n + v_n = \ell$$

b. $a, b, c, d : \text{Ens} \vdash \big(\exists X : \text{Ens}, \forall x : \text{Ens}, x \in X \Leftrightarrow (x = a \text{ ou } x = b \text{ ou } x = c \text{ ou } x = d) \big)$

$$\text{et} \Big(\forall X, X' : \text{Ens}, \big((\forall x : \text{Ens}, x \in X \Leftrightarrow (x = a \text{ ou} \dots \text{ou } x = d)) \text{ et } (\forall x : \text{Ens}, x \in X' \Leftrightarrow (x = a \text{ ou} \dots \text{ou } x = d)) \big) \Rightarrow X = X' \Big)$$

On obtient deux séquents après application de la règle $(\vdash \text{et})$. Le premier est

$$a, b, c, d : \text{Ens} \vdash \exists X : \text{Ens}, \forall x : \text{Ens} \; x \in X \Leftrightarrow (x = a \text{ ou } x = b \text{ ou } x = c \text{ ou } x = d)$$

et ne peut plus être transformé davantage par des règles gratuites. Le second est $a, b, c, d : \text{Ens} \vdash \forall X, X' : \text{Ens} \dots X = X'$

Après application dans l'ordre des règles $(\vdash \forall) (\vdash \forall) (\vdash \Rightarrow) (\text{et} \vdash)$ on obtient :

$$a, b, c, d, X, X' : \text{Ens}, \; (\forall x : \text{Ens}, x \in X \Leftrightarrow (x = a \text{ ou} \dots \text{ou } x = d)), (\forall x : \text{Ens}, x \in X' \Leftrightarrow (x = a \text{ ou} \dots \text{ou } x = d)) \vdash X = X'$$

L1MD – Interrogation 2 **5 mai 2014**

Sujet B

durée 40mn ; tout document et matériel électronique interdit

Nom : **Prénom :**

Sujet sur deux pages !

1. Les séquents suivants sont mal formés. Compléter les en déclarant les variables libres avec un type raisonnable et en donnant un type raisonnable aux variables liées lorsque celui-ci est manquant. Expliquer votre choix de type.

a. $A \subset C,\ B \subset C \ \vdash\ A \cup B \subset C$

b. $E \subset \mathbb{N},\ E \neq \emptyset \ \vdash\ \exists n,\ n$ est le plus petit élément de E

c. $x_0 \in \mathbb{R},\ f$ est continue sur $\mathbb{R}\ \vdash\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

a. $A, B, C : Ens,\ A \subset C,\ B \subset C \vdash A \cup B \subset C$

On choisit le type ensemble à cause des relations d'inclusion et de l'opération $\cup$

b. $E : Ens,\ E \subset \mathbb{N},\ E \neq \emptyset \vdash \exists n : \mathbb{N}$, n est le plus petit élément de E

On choisit le type ensemble pour E à cause de la relation d'inclusion $E \subset \mathbb{N}$ et de la relation $E \neq \emptyset$

On choisit le type entier pour n car n est un elt de E qui est une partie de $\mathbb{N}$. On pourrait aussi écrire $\exists n : E$

c $x_0 : \mathbb{R},\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$ $\vdash \lim\limits_{\substack{x : \mathbb{R} \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0)$

On choisit $x_0 : \mathbb{R}$ à cause de la relation $x_0 \in \mathbb{R}$. Cette relation devient alors une tautologie

On choisit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à cause de l'énoncé "f est continue sur $\mathbb{R}$", égalt à cause de ~~f(x)~~ l'expression $f(x_0)$

On choisit $x : \mathbb{R}$ à cause de la construction $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ sachant $x_0 : \mathbb{R}$, sachant égalt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

2. Traduire chacun des théorèmes suivants (indiqués entre "–") par un séquent puis formaliser en utilisant au besoin les formalisations partielles indiquées (c'est à dire sans les formaliser davantage).

Quel séquent ou liste de séquents obtient on après application autant qu'on le peut des règles "gratuites" $(\vdash \forall), (\vdash \Rightarrow), (\vdash \text{et}), (\exists \vdash), (\text{et} \vdash), (\text{ou} \vdash)$?

a. "Le produit de deux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 est continue en 0" — En utilisant le résumé $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ avec les variables de son choix.

b. "Soit X un ensemble. Alors il existe un ensemble dont les éléments sont exactement les parties de X, et deux tels ensembles sont égaux" — On n'utilisera pas le résumé $\exists!$; on utilisera les énoncés tels que $a \in A$, $A \subset B$, $A = B$ avec les variables de son choix.

a. $\vdash$ le produit de ...

$$\vdash \forall f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \left(\exists l_1 : \mathbb{R}\ \lim_{x \to 0} f_1(x) = l_1\right) \text{ et } \left(\exists l : \mathbb{R},\ \lim_{x \to 0} f_2(x) = l\right) \Rightarrow \left(\exists l : \mathbb{R},\ \lim_{x \to 0} f_1(x) \times f_2(x) = l\right)$$

Après application des règles (dans l'ordre) $(\vdash\forall), (\vdash\forall), (\vdash\Rightarrow), (\text{et}\vdash), (\exists\vdash), (\exists\vdash)$ on obtient

$$f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ l_1, l_2 : \mathbb{R},\ \lim_{x \to 0} f_1(x) = l_1,\ \lim_{x \to 0} f_2(x) = l_2 \vdash \exists l : \mathbb{R},\ \lim_{x \to 0} f_1(x) \times f_2(x) = l$$

(On a renommer les variables liées par $\exists$ pour éviter un conflit)

b. $$X : \text{Ens} \vdash \left(\exists Y : \text{Ens},\ \forall x : \text{Ens},\ x \in Y \Leftrightarrow x \subset X\right) \text{ et } \left(\forall Y, Y' : \text{Ens},\ \left((\forall x : \text{Ens},\ x \in Y \Leftrightarrow x \subset X) \text{ et } (\forall x : \text{Ens},\ x \in Y' \Leftrightarrow x \subset X)\right) \Rightarrow Y = Y'\right)$$

On obtient deux séquents après application de la règle $(\vdash \text{et})$. Le premier est $X : \text{Ens} \vdash \exists Y : \text{Ens} \ldots x \subset X$ et ne peut être transformé davantage par les règles gratuites.

Le second est $X : \text{Ens} \vdash \forall Y, Y' : \text{Ens}, \ldots Y = Y'$. Après application des règles $(\vdash\forall), (\vdash\forall), (\vdash\Rightarrow), (\text{et}\vdash)$ on obtient :

$$X, Y, Y' : \text{Ens},\ (\forall x : \text{Ens},\ x \in Y \Leftrightarrow x \subset X),\ (\forall x : \text{Ens},\ x \in Y' \Leftrightarrow x \subset X) \vdash Y = Y'$$